



Facultad de Ciencias

Estimación de longitud en curvas generadas por sumas exponenciales

Length estimation in curves

Trabajo de fin de grado
para acceder al

GRADO EN MATEMÁTICAS

Autor: Marina Girón

Codirector: Ana I. Gómez Pérez

Director: Domingo Gómez Pérez

Junio de 2020

Agradecimientos

Quiero dar las gracias a mi familia, por haberme apoyado durante todos estos años, en especial a mi hermanos que han supuesto una base en mi vida.

Por otro lado, me gustaría agradecer a mis amigos su confianza y su compañía de la que he disfrutado y aprendido mucho. Asimismo, quiero dar las gracias a mis compañeros de prácticas en Accenture por su colaboración. También agradecer a mis compañeros de piso de Barcelona por su motivación y su comprensión todos los días.

Una vez dada las gracias a mi familia y amigos me gustaría agradecer a mis tutores Ana Isabel Gómez y Domingo Gómez por su dedicación, por ayudarme con las dudas y haberme guiado correctamente durante la elaboración de este trabajo.

Resumen

palabras clave: estimación de longitud, predicción de varianza, Quasi-Monte Carlo, curvas planas.

La estereología es una rama interesante dentro de la probabilidad, la estadística y la geometría integral. Se puede definir como la ciencia que se encarga de estimar información sobre diferentes estructuras geométricas utilizando muestreo aleatorio y sistemático.

Otra aplicación muy interesante donde aparece el muestreo es el método Quasi-Monte Carlo. Es un método muy conocido y práctico que sirve fundamentalmente para aproximar integrales utilizando los valores medios de funciones en un determinado dominio. Es decir, para aproximar la integral de una función como el promedio de la función evaluada en un conjunto de puntos.

El propósito de este trabajo es probar que estos dos campos de las matemáticas que parecen muy distintos se pueden relacionar en una teoría más amplia así como resolver los mismos problemas.

Para esto se han estudiado varios estimadores en función del objeto de interés que queremos estudiar, previamente propuestos en estereología. En cada caso se analizará el error de estos estimadores y aplicando resultados provenientes de métodos Quasi-Monte Carlo se podrán construir diferentes estimadores de la varianza o error de la estimación, donde se podrá observar la conexión de estos métodos.

Para concluir, se realizará un caso práctico, estimando la longitud de un tipo concreto de curvas para ver que estimadores resultan más precisos a la hora de predecir el error. Todas las gráficas de las curvas y cálculos necesarios para la estimación han sido realizados con el software Sagemath.

Length estimation in curves

Abstract

keywords: length estimation, variance prediction, Quasi-Monte Carlo, planar curves.

Stereology constitutes an interesting branch of probability, statistics, and integral geometry. It can be defined as the science of estimating information of different geometric structures by using systematic random sampling.

Another very interesting application of sampling is the Quasi-Monte Carlo method. It is a very well known and practical method that serves fundamentally to approximate integrals using average values of functions inside a given domain. That is, to approximate the integral of a certain function by the average of the function evaluated in a set of points.

The purpose of this work is to prove that these two fields of mathematics that seem very different can be related to a broader theory and to solve the same problems as well.

Several previously proposed stereological estimators have been considered depending on the object of interest that we want to study. In each case the error of these estimators will be analyzed and results coming from Quasi-Monte Carlo will be applied to construct different variance or error estimators for the samples, in which we will be able to see the connection of these methods.

To conclude, a practical case has been studied to estimate the length of a particular type of curves to observe which estimators are the most precise to actually predict the error. All curve plots and calculations needed for the estimation has been developed by using the library SageMath.

Índice

1. Introducción	1
2. Muestreo sistemático y aleatorio en \mathbb{R}	5
2.1. Varianza de los estimadores	5
2.1.1. Representación exacta de la varianza	7
2.1.2. Aplicación a la función escalón	8
2.2. Estimación de la varianza	9
2.2.1. Estimación de la función covariograma	10
2.3. Estimador en un espacio con reproductor Kernel en \mathbb{R}	11
3. Muestreo Sistemático y aleatorio en el círculo y en la esfera	13
3.1. Muestreo sistemático y aleatorio en el círculo	13
3.1.1. Representación exacta de la varianza	14
3.1.2. Estimación de la varianza	16
3.1.3. Estimador en un espacio con reproductor Kernel en el círculo	18
3.2. Muestreo sistemático y aleatorio en el semicírculo	20
3.2.1. Aproximación y estimación de la varianza	20
3.3. Muestreo sistemático y aleatorio en la esfera	20
3.3.1. Representación exacta de la varianza	23
3.3.2. Aproximación de la varianza	24
3.3.3. Estimación de la varianza	25
3.3.4. Estimador en un espacio con kernel reproductor en la esfera	26
4. Estimadores de la longitud de las curvas	29
4.1. Curvas formadas por sumas finitas de exponenciales	29
4.1.1. Simetría	29
4.1.2. Puntos de intersección	31
4.2. Estimación de la longitud y de la varianza	35
4.2.1. Método de Buffon-Steinhaus	37
4.2.2. Estimador de la varianza método Buffon-Steinhaus	40
4.2.3. Método de estimación del error Quasi-Monte Carlo	43
5. Conclusiones	45
A. Apéndice	47
Referencias	61

1 Introducción

La estereología (del griego «stereos» = sólido) fue originalmente definida como «la interpretación espacial de secciones». Este campo provee técnicas prácticas para extraer información sobre el volumen, área o longitud de cuerpos a partir de secciones o proyecciones. Es simplemente el estudio sobre cómo estimar cantidades geométricas definidas en estructuras arbitrarias a partir de la información proporcionada por un muestreo geométrico adecuado [Arnaud, 2006].

La estereología de primer orden explora cuatro cantidades principales:

- Número: Es el número de «cosas». Determinar el número de objetos no es tan simple como parece ya que se presenta el problema de eliminar los efectos de tamaño y forma de las partículas en el muestreo mediante, por ejemplo, reglas de conteo.
- Longitud: la longitud es un concepto fácil de entender, pero no tan fácil de definir. La longitud se vuelve complicada cuando se consideran objetos que se tuercen y giran en el espacio. Sobre la base de este problema se han desarrollado métodos para estimar la longitud de curvas planas, a partir de la intersección de éstas con rectas u otras curvas.
- Superficie: la superficie es igual al área de superficie. Existen diferentes tipos de sondas (puntos, rectas, proyecciones sobre planos) que pueden utilizarse para estimar el área de una superficie diferenciable y acotada en el espacio.
- Área de volumen: el parámetro que se quiere estimar es el volumen de un objeto acotado.

La estereología de segundo orden trata las relaciones entre los objetos como por ejemplo la distribución de partículas o la conectividad de éstas. En este trabajo nos centraremos en la estereología por diseño, o también conocida como estereología insesgada, en la que el objeto de interés está acotado y se utiliza una sonda dotada de un mecanismo aleatorio. El procedimiento de muestreo se planifica cuidadosamente con anticipación para evitar sesgos y la cantidad de muestreo se ajusta a la precisión requerida. Las investigaciones en este campo han mejorado la fiabilidad y la eficiencia de la cuantificación de objetos para abordar problemas sobre todo relacionados con las ciencias biomédicas. Una de las aplicaciones de métodos estereológicos ha sido el análisis del sistema nervioso central, así como otros órganos y tejidos y esto ha contribuido considerablemente a nuestra comprensión de la morfología funcional y patológica del cuerpo. Es una herramienta muy importante y eficiente en muchas aplicaciones de Microscopía, Mineralogía, Ciencia de los Materiales, y Ciencias Biológicas [ste, 2018a].

Una sonda o «probe» S es una figura geométrica que se interseca con el objeto X que se está estudiando para medir el parámetro de interés. Una «sección» es la intersección de la sonda con el objeto y equivale a una muestra estadística. Si estamos trabajando en un espacio de dimensión n para que podamos obtener una muestra la dimensión de la intersección entre la sonda y el objeto tiene que ser mayor o igual que 0, es decir $\dim(X \cap S) \geq 0$, entonces la dimensión de la sonda tiene que cumplir que:

$$\dim(S) \geq n - \dim(X).$$

El muestreo sistemático y aleatorio de período H , consiste en elegir un número aleatorio z dentro del intervalo $[0, H)$ y formar una muestra con los correspondientes números $z, z + H, z + 2H, \dots$ Por ejemplo, tomando $H = 4$, se elige un número aleatorio entre el 0 y el 4, supongamos que es elegido

el 3. Entonces la muestra sería $3, 7, 11, 15, \dots$. Este tipo de muestreo reduce la varianza en comparación con el muestreo aleatorio, además este método es insesgado siempre que el número inicial sea escogido aleatoriamente [ste, 2018b].

La información sobre un parámetro de cada objeto es obtenida mediante un estimador, que es la fórmula matemática que te devuelve las estimaciones a partir de los datos. El sesgo de un estimador es la distancia de la media de las estimaciones obtenidas al parámetro de interés, es decir, la cercanía de las estimaciones al valor real. Pero como el tamaño del objetivo se desconoce al realizar la estimación hay que asegurarse de que el estimador que se utiliza es insesgado. La estereología utiliza el muestreo sistemático y aleatorio para proveer una información insesgada y sistemática [Cruz-Orive et al., 2014].

Dentro de la estereología por diseño existen dos métodos muy importantes que se siguen empleando para estimar el volumen y la longitud asociada a objetos: El método de Cavalieri y el método de Buffon-Steinhaus [Arnau, 2006].

En primer lugar, el método de Cavalieri consiste en fijar un eje e intersectar el objeto con un conjunto sistemático de planos paralelos y perpendiculares al eje fijado (la sonda). La distancia entre estos planos consecutivos es una cantidad fija H . La abscisa z de uno de estos planos (punto de intersección del plano y el eje) se elige de manera aleatoria y uniforme en el intervalo $[0, H)$. De esta forma, el estimador del volumen del objeto es igual a la suma de las áreas intersección entre el objeto y los planos paralelos, multiplicada por la distancia H . Como el punto inicial z ha sido escogido de manera aleatoria se puede demostrar que es un estimador insesgado.

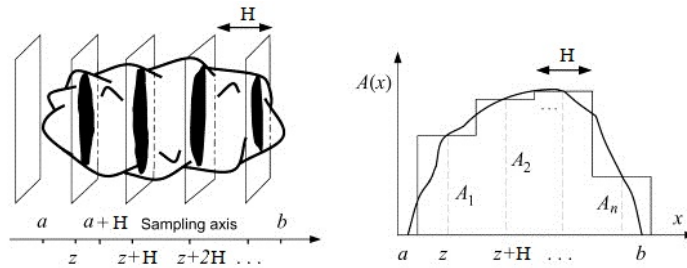


Ilustración 1: Método de Cavalieri. Estimación del volumen de un cuerpo mediante un conjunto sistemático de planos con una distancia constante H .

El método de Buffon-Steinhaus estima el parámetro de interés mediante un conteo de puntos e intersecciones. Una particularización de este método es utilizar una rejilla cuadrada («test system»), formada por dos «test lines» que son dos conjuntos sistemáticos de rectas. En este caso es necesario que la rejilla sea colocada de forma aleatoria y también que su orientación sea aleatoria, para asegurar la insesgadez del estimador. Se elige un punto c uniformemente al azar que esté en la «diana» y en dicho punto se superpondrá un vértice de la rejilla y después, se rotará la rejilla un ángulo ϕ uniformemente aleatorio. Una vez colocada la rejilla se cuenta el número de intersecciones con la curva para poder estimar su longitud.

A continuación daremos algunas definiciones que se utilizarán a lo largo del trabajo.

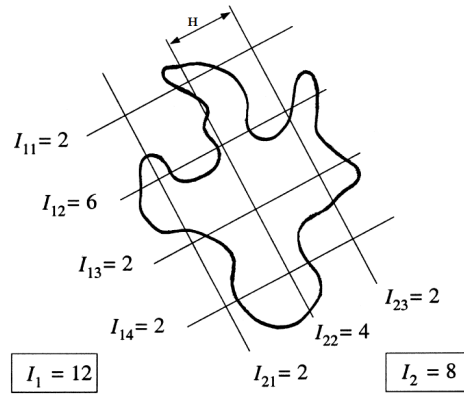


Ilustración 2: Método de Buffon. Estimación de la longitud de una curva cerrada con una sonda formada por dos conjuntos sistemáticos de «test» lines que distan H .

En estadística, la esperanza matemática de una variable aleatoria x está definida por $E(x)$ que formaliza la idea de valor medio de un fenómeno aleatorio.

Definición 1. Para una variable aleatoria absolutamente continua, la esperanza $E(x)$ se calcula mediante la integral de todos los valores y la función de densidad $p(x)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} xp(x)dx.$$

Denotaremos como \hat{Q} a un estimador de un parámetro Q , su valor medio será $E(\hat{Q})$, su sesgo $E(\hat{Q}) - Q$, su varianza $\text{Var}(\hat{Q}) = E(\hat{Q} - E(\hat{Q}))^2$ y por último su coeficiente de error $\text{CE}(\hat{Q}) = (\text{Var}(\hat{Q}))^{1/2}/E(\hat{Q})$.

Una función de medida asigna un número real no-negativo a ciertos subconjuntos de un conjunto, así como mantiene la estructura entre dos espacios medibles.

Definición 2. Una función f entre dos conjuntos medibles se dice que es medible si la preimagen de cualquier conjunto medible es a su vez medible.

Supongamos que queremos medir el parámetro de interés de un objeto con una función discontinua, con esta función no podríamos aplicar directamente el método Quasi-Monte Carlo. Para garantizar que la varianza o el error tienda a cero al incrementar el número de puntos de muestreo es importante trabajar en espacios donde la función de medida cumpla ciertas propiedades, como por ejemplo, que sea continua y con primera derivada continua. Asimismo necesitaremos un método para comparar funciones entre sí y medir su distancia. Esto puede venir dado por un producto escalar y por esto consideraremos espacios de Hilbert de funciones \mathcal{H} para la función de medida que nos aseguren estas suposiciones.

Definición 3. Un espacio de Hilbert es un espacio Euclídeo con un producto escalar y completo. Un espacio de Hilbert de funciones sobre $[0, 1]^s$ se llama espacio reproductor de kernel (reproducing kernel space) si existe una función $K : [0, 1]^s \times [0, 1]^s \mapsto \mathbb{C}$ tal que

- $K(\cdot, y)$ está en el espacio de Hilbert de funciones para todo $y \in [0, 1]^s$
- $\langle f, K(\cdot, y) \rangle = f(y)$ para todo $y \in [0, 1]^s$ y f perteneciente al espacio de Hilbert de funciones.

El método de Quasi-Monte Carlo es un método numérico que permite la estimación de integrales en varias dimensiones a partir de un conjunto de puntos de muestreo, por ejemplo con el objetivo de estimar medias de funciones. El nombre de Quasi-Monte Carlo se debe a que los puntos son elegidos

siguiendo alguna condición y no son completamente aleatorios como ocurre en el método de Monte Carlo [Leobacher y Pillichshammer, 2014]. El cálculo integral se utiliza principalmente para el cálculo de superficies, áreas y volúmenes de regiones, por lo que estimar integrales equivale a estimar el volumen y área de diferentes cuerpos.

Normalizaremos el dominio de integración para que sea el intervalo $[0, 1]$ y aplicaremos el método Quasi-Monte Carlo en el espacio \mathcal{H} . La finalidad es aproximar la integral $\int_0^1 f(x) dx$ de la forma

$$Q_N(f) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(x_n),$$

con nodos de integración x_0, x_1, \dots, x_N elegidos entre $[0, 1]$. Es decir la estimación de la integral es

$$\int_0^1 f(x) dx \approx Q_N(f).$$

Entonces el error de la estimación de la integral de una función f definida en $[0, 1]$ sobre un conjunto de puntos $P = \{x_0, x_1, \dots, x_{N-1}\}$

$$e(f, P) = \int_0^1 f(x) dx - \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(x_n).$$

Utilizando los reproductores Kernel se puede conseguir una teoría bastante amplia del error en \mathcal{H} .

Gracias al teorema de Moore–Aronszajn (Aronszajn [1950]) sabemos que un espacio con reproductor kernel definido positivo y simétrico determina un único espacio de Hilbert con núcleo reproductivo.

Teorema 1. *Sea K un kernel reproductivo definido positivo y simétrico sobre un conjunto X . Entonces, existe un único espacio de Hilbert de funciones en X para el cual K es un kernel reproductivo.*

La demostración de las propiedades de los reproductores Kernel se sigue en Aronszajn [1950]. Una de las consecuencias de la demostración es que cualquier función de un espacio con reproductor de kernel se puede representar como una suma infinita de evaluaciones de núcleos evaluadores, Es decir, $f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i K(x, y_i)$, donde y_i corresponden a valores de X .

A lo largo de este trabajo estudiaremos los estimadores de la longitud, el área y el volumen de cualquier objeto o que se encuentre parametrizado en un círculo, un semicírculo, o en una esfera. Se aplicará el método de Cavalieri para obtener una estimación del parámetro de interés que consideremos en cada caso y se calculará la varianza de estos estimadores. Después de ver como se halla la varianza, construiremos estimadores de la varianza para los casos en los que no sea posible calcularla directamente. Los estimadores se conseguirán de dos formas diferentes, la primera utilizando los métodos empleados en estereología y la segunda utilizando la teoría del error del método QMC.

Para comprobar la eficacia de estos métodos se estimará la longitud de unas curvas generadas por sumas finitas de exponenciales: $\gamma_a(t) = \sum_{j=0}^m e^{2\pi i t a_j}$, con $a = (a_1, \dots, a_m)$ y $m \in \mathbb{N}$ propuestas por Pausinger y Vartziotis [2018]. Mediante el método de Buffon–Steinhaus se conseguirá una estimación de la longitud de estas curvas y a partir de estas estimaciones podremos calcular la varianza real y poder evaluar los estimadores de la varianza contruidos previamente.

Veremos como los métodos de estimación de la estereología son casos particulares del método Quasi-Monte Carlo. Con ello unificaremos dos campos que parecen distintos en una teoría más general.

2 Muestreo sistemático y aleatorio en \mathbb{R}

Seguiremos la introducción propuesta en el artículo de [Michel y Cruz-Orive \[1988\]](#).

Sea $f(x)$ una función definida en un conjunto acotado con soporte finito que supondremos entre $[0, 1]$. En otro caso se realizará un cambio de variable adecuado. Queremos estimar el área de bajo la función $f(x)$ empleando muestreo sistemático con una inicialización aleatoria, en este caso el parámetro de interés es $Q = \int_0^1 f(x) dx$.

Como hemos descrito en la introducción, aplicaremos el método de Cavalieri tomando al eje x como el eje fijo y una muestra sistemática de planos perpendiculares al eje x que distan H con z como el punto inicial aleatorio ($UR(0, H)$). Entre dos planos consecutivos cualesquiera « j » y « $j + 1$ » se obtiene un área de intersección Q_j que corresponde con el área que ocupa el objeto en ese espacio determinado por los planos.

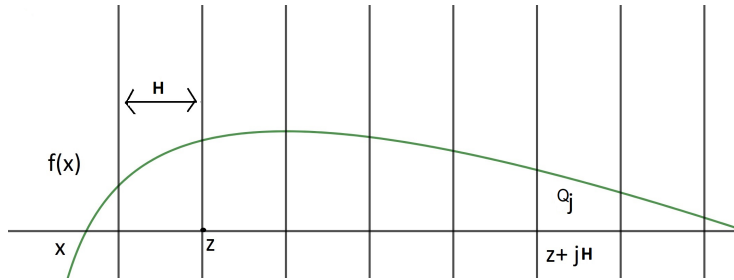


Ilustración 3: Gráfica de $f(x)$ con un conjunto de planos sistemáticos que distan H .

De esta forma, un estimador del volumen es igual a la suma de las áreas de intersección multiplicadas por la distancia fija H entre planos,

$$\hat{Q}(z) = H \sum_{j=0}^{\infty} f(z + jH), \quad j \in \mathbb{Z}. \quad (1)$$

Esta suma infinita se puede reducir a un número finito de términos ya que la mayoría son cero y además se puede comprobar si este estimador es insesgado

$$E(\hat{Q}(z)) = \int_0^H H \sum_{j=0}^{\infty} f(z + jH) \frac{dz}{H} = \sum_{j=0}^{\infty} \int_0^H f(z + jH) dz = \sum_{j=0}^{\infty} Q_j = Q.$$

2.1. Varianza de los estimadores

Un estimador es eficiente u óptimo cuando posee varianza mínima o bien en términos relativos cuando presenta menor varianza que otro. Por este motivo es muy importante que conozcamos la varianza de los estimadores que vamos a desarrollar para poder evaluarlos. Recordamos que en la sección anterior hemos asumido que el soporte de la función de medida f está contenido en $[0, 1]$, i.e. $f(x) = 0$ si $x \notin [0, 1]$.

Definición 4. Se define la función covariograma como una función g tal que:

$$g(h) = \int_0^1 f(x)f(x+h) \, dx, \quad h \in [-1, 1].$$

Lema 1. Utilizando las características de las funciones se llega a que la función covariograma cumple las siguientes propiedades:

1. $g(h) = g(-h)$,
2. $|g(h)| \leq g(0)$,
3. $\int_0^1 g(h) \, dh = \left(\int_0^1 f(x) \, dx \right)^2 = Q^2$.

Demostración. La demostración del ítem 1 es la siguiente, por definición $g(-h) = \int_0^1 f(x)f(x-h)dx$. Utilizando que el soporte de f es $[0, 1]$ y realizando el cambio de variable $y = x - h$ obtenemos que:

$$\int_h^1 f(x)f(x-h)dx = \int_0^{1-h} f(y+h)f(y)dy = g(h).$$

Para la demostración del ítem 2, tenemos

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{-\infty}^{\infty} (f(x+h) \pm f(x))^2 \, dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x+h) \, dx + \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x) \, dx \pm 2 \int_{-\infty}^{\infty} f(x)f(x+h) \, dx = 2g(0) \pm 2g(h). \end{aligned}$$

Por último la demostración del tercer ítem

$$\int_0^1 g(h) \, dh = \int_0^1 \int_0^1 f(x)f(x+h) \, dx \, dh = \int_0^1 f(x) \, dx \int_0^1 f(x+h) \, dh = \int_0^1 f^2(x) \, dx.$$

Esto completa la demostración. \square

Hemos introducido la función de covariograma para estudiar la varianza de un estimador, siendo la definición de varianza

$$\text{Var}(\hat{Q}(z)) = E(\hat{Q}(z) - E(\hat{Q}(z)))^2 = E(\hat{Q}(z)^2) - E(\hat{Q}(z))^2 = \frac{1}{H} \int_0^H \hat{Q}(z)^2 \, dz - Q^2, \quad (2)$$

donde operando el primer término de la igualdad

$$\int_0^H \hat{Q}(z)^2 \, dz = H^2 \int_0^H \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} f(z+pH)f(z+qH) \, dz, \quad \text{con } p, q \in \mathbb{Z}. \quad (3)$$

Suponiendo que $q > p$ y sin pérdida de generalidad, podemos escribir en (3) q como $p+k$, con $k \in \mathbb{Z}$. Por lo que quedaría:

$$\begin{aligned} H^2 \int_0^H \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{p=0}^{\infty} f(z+pH)f(z+pH+kH) \, dz = \\ H^2 \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^H \sum_{p=0}^{\infty} f(z+pH)f(z+pH+kH) \, dz = H^2 \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^1 f(x)f(x+kH) \, dx = H^2 \sum_{k=0}^{\infty} g(kH). \end{aligned}$$

Siendo $g(\cdot)$ el covariograma de $f(x)$. Entonces tomando en cuenta que $f(x)$, tiene soporte en $[0, 1]$:

$$\text{Var}(\hat{Q}(z)) = H \sum_{k=0}^{\infty} g(kH) - \int_0^1 g(h) \, dh. \quad (4)$$

La varianza de la estimación de Q es el área del histograma de $g(kH)$ menos el área de la curva del covariograma.

2.1.1. Representación exacta de la varianza

Consideremos el espacio \mathcal{H}_1 definido en el libro de [Leobacher y Pillichshammer, 2014, Página 59],

$$\mathcal{H}_1 = \{f : [0, 1] \mapsto \mathbb{R} : f \text{ es absolutamente continua} \},$$

además las funciones absolutamente continuas cumplen que su primera derivada es integrable. Este conjunto tiene definido un producto interno que lo dota de estructura de espacio Hilbert. Como $f \in \mathcal{H}_1$ podemos escribir el desarrollo en serie de f :

$$s_f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{\frac{2\pi i k z}{H}},$$

Los coeficientes de esta función definida en el intervalo $[0, H]$ son

$$c_k = \int_0^1 f(z) e^{\frac{-2\pi i k z}{H}} dz = \frac{1}{H} \int_0^H H \sum_{j=0}^{\infty} f(z + jH) e^{\frac{-2\pi i k z}{H}} dz$$

Gracias a que la función de medida f es continua y a las características de las series convergentes, se tiene

$$\widehat{Q}(z) = H \sum_{j=0}^{\infty} s_f(z + jH).$$

Entonces una expresión alternativa para la varianza del estimador:

$$\text{Var}(\widehat{Q}(z)) = \frac{1}{H} \int_0^H \widehat{Q}(z)^2 dz - E(\widehat{Q}(z))^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \bar{c}_k - \int_0^1 g(h) dh.$$

Para probarlo, partimos de la ecuación (2) y hacemos uso de la identidad de Parseval (1)

$$\frac{1}{H} \int_0^H \widehat{Q}(z)^2 dz = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \bar{c}_k,$$

con lo que queda demostrado.

Consideremos la función $F(\omega) = \int_0^1 f(z) e^{-2\pi i \omega z} dz$. Está claro que la varianza con esta función es:

$$\text{Var}(\widehat{Q}(z)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} F\left(\frac{n}{H}\right) \bar{F}\left(\frac{n}{H}\right) - \int_0^1 g(h) dh,$$

donde $\bar{F}(u)$ es el conjugado de $F(u)$. Si tomamos ahora la transformada de Fourier $G(\omega)$ de $g(h)$.

$$\begin{aligned} G(\omega) &= \int_0^1 g(h) e^{-2\pi i \omega h} dh = \int_0^1 f(x) \int_0^1 f(x+h) e^{-2\pi i \omega h} dh dx = \\ &= \int_0^1 f(x) \int_0^1 f(r) e^{-2\pi i \omega (r-x)} dr dx = \int_0^1 f(x) e^{2\pi i \omega x} dx \int_0^1 f(r) e^{-2\pi i \omega r} dr = F(\omega) \bar{F}(\omega), \end{aligned}$$

donde en el último paso se ha realizado el cambio de variable $r = x + h$. Entonces, la varianza se puede escribir en función de la transformada de Fourier del covariograma

$$\text{Var}(\widehat{Q}(z)) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} G\left(\frac{n}{H}\right) - G(0) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} G\left(\frac{n}{H}\right). \quad (5)$$

2.1.2. Aplicación a la función escalón

Dada la siguiente función:

$$f(x) = x_i, \quad (i-1)H < x \leq iH, \quad \text{con } i = 1, \dots, m,$$

siendo $x_1, \dots, x_m \in \mathbb{N}$ realizaciones de variables aleatorias independientes igualmente distribuidos con esperanza μ y varianza σ^2 . En esta función escalón podemos examinar como se calcula la varianza. Nos servirá de gran ayuda cuando realicemos el método de conteo de puntos e intersecciones por ejemplo en el método de Buffon-Steinhaus. Como el soporte de la función es $[0, 1]$, $mH = 1$. Esto se utiliza para representar una cierta variabilidad en la medida.

La finalidad es calcular una estimación del área de $f(x)$ a partir del método de Cavalieri, como ya hemos visto, esto es igual a calcular

$$\hat{Q}(z) = H \sum_{i=1}^m f(z + iH) = H \sum_{i=1}^m x_i.$$

Claramente la varianza de $\hat{Q}(z)$ es solamente debida a los valores x_i con $i = 1, \dots, m$ y, por tanto, la varianza es $H\sigma^2$.

Distingamos dos casos posibles para la función $g(h)$:

1. Cuando $0 \leq |h| \leq H$. En este caso x y $x+h$ pueden coincidir dentro de un mismo intervalo o puede que se encuentren en distintos.

$$f(x)f(x+h) = \begin{cases} x_i^2 & \text{si } (i-1)H < x \leq iH - |h| \\ x_i x_{i+1} & \text{si } iH - |h| < x \leq iH \end{cases}$$

Entonces en este caso el covariograma sería:

$$g(h) = \sum_{i=1}^m \left(\int_{(i-1)H}^{iH-|h|} x_i^2 dx + \int_{iH-|h|}^{iH} x_i x_{i+1} dx \right) = (H - |h|) \sum_{i=1}^m x_i^2 + |h| \sum_{i=1}^{m-1} x_i x_{i+1}.$$

Aplicando el operador esperanza obtenemos:

$$E(g(h)) = E \left((H - |h|) \sum_{i=1}^m x_i^2 + |h| \sum_{i=1}^{m-1} x_i x_{i+1} \right) = (H - |h|)m\sigma^2 + (mH - |h|)\mu^2.$$

2. La otra posibilidad es que $H < |h| \leq mH$, en este caso x y $x+h$ siempre van a estar en intervalos distintos. Entonces la esperanza del covariograma es:

$$E(g(h)) = (mH - |h|)\mu^2.$$

Desarrollemos otras maneras de obtener la varianza de $\hat{Q}(z)$. Aplicando la tercera propiedad del lema 1,

$$\int_{-1}^1 g(h) dh = (H(x_1 + \dots + x_m))^2.$$

Su esperanza será:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 E(g(h)) dh &= E(H^2(x_1 + \dots + x_m)^2) = H^2(E(x_1 + x_2 + \dots + x_m)^2) = \\ &= H^2(\text{Var}(x_1 + \dots + x_m) + E(x_1 + \dots + x_m)^2) = \text{Var}(H(x_1 + \dots + x_m)) + E(H(x_1 + \dots + x_m))^2. \end{aligned}$$

Calculando directamente esta integral:

$$\int_{-1}^1 E(g(h)) \, dh = h^2 m \sigma^2 + (h m \mu)^2 = \text{Var}(H(x_1 + \cdots + x_m)) + E(H(x_1 + \cdots + x_m))^2.$$

Donde $\text{Var}(\hat{Q}(z)) = H\sigma^2$ y $E(V)^2 = \mu^2$.

Otra manera de obtener la varianza es utilizando la expresión (4):

$$\text{Var}(\hat{Q}(z)) = Hg(0) + 2H \sum_{k=1}^m g(kH) - (E(\hat{Q}(z)))^2 = H\sigma^2.$$

Todos los cálculos están en el apéndice (4).

Finalmente cuando $h = 0$, hemos visto que la esperanza de $g(0)$ en el caso $h \leq H$ es $(\mu^2 + \sigma^2)$ y en otro caso sería de μ^2 . Se puede tomar $E(\tilde{g}(0))$ como la extrapolación de $E(g(0))$ que evalúa en $h = 0$ cuando $H < |h|$. Es decir, sería el valor esperado del covariograma en el 0. Entonces la varianza es

$$\text{Var}(\hat{Q}(z)) = H(E(g(0)) - E(\tilde{g}(0))) = H\sigma^2.$$

Se pueden observar los x_i como saltos independientes, entonces la varianza se puede considerar como la diferencia entre estos saltos. Este tipo de error es conocido como el error «nugget» o error local.

2.2. Estimación de la varianza

Hemos visto que calcular la varianza de los estimadores equivale a calcular la función covariograma, pero esto puede resultar muy complejo. En consecuencia tendremos que estimar el valor de esta función para poder estimar el valor de la varianza. La mejor forma de aproximar la función covariograma es modelándola.

Consideremos el siguiente modelo para $g(h) = \sum_{j=0}^r a_j |h|^j$, se trata de un polinomio de grado r . Su transformada de Fourier $G(\omega)$ es

$$G(\omega) = 2 \int_0^\infty \sum_{j=0}^r (a_j h^j) e^{-2i\pi\omega h} \, dh = 2 \sum_{j=0}^r a_j \int_0^\infty h^j e^{-2i\pi\omega h} \, dh.$$

Utilizando la función Gamma $\left(\Gamma(m) = \int_0^\infty y^{m-1} e^{-y} \, dy \text{ (apéndice 2)} \right)$ con $y = 2\pi i \omega h$ la integral se puede reescribir como

$$\frac{1}{(2\pi i \omega)^{j+1}} \int_0^\infty y^j e^{-y} \, dy = \frac{\Gamma(j+1)}{(2\pi i \omega)^{j+1}}.$$

Si estudiamos el caso particular $\omega = n/H$, obtenemos la siguiente expresión,

$$G\left(\frac{n}{H}\right) = 2 \sum_{j=0}^r a_j \frac{\Gamma(j+1) H^{j+1}}{(2i\pi n)^{j+1}}.$$

Solo nos interesa la parte real, por lo que hay que evaluar la función cuando $(2\pi i n)^{j+1}$ esté elevado por un número par, es decir cuando j es impar. Tomando $j = 2k - 1$, con $k = 1, 2, \dots, s = \frac{r+1}{2}$. Sustituyendo estos valores en la ecuación (5):

$$\text{Var}(\hat{Q}) = 2 \sum_{n=1}^\infty \text{Re}\left(G\left(\frac{n}{H}\right)\right) = 2 \sum_{k=1}^s a_{2k-1} H^{2k} \left(\frac{2\Gamma(2k)}{(-1)^k (2\pi)^{2k}} \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^{2k}} \right). \quad (6)$$

Utilizando el número de Bernoulli $B_{2k} \equiv B_{2k}(0)$ (apéndice 3) sabemos que

$B_{2k}(0) = \frac{(-1)^{k-1} 2\Gamma(2k+1)}{2\pi^{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$. Además $\Gamma(2k+1) = 2k\Gamma(2k)$, entonces reemplazando en (6) estas identidades se obtiene la varianza para el modelo de covariograma $g(h)$.

$$\text{Var}(\hat{Q}) = - \sum_{k=1}^{\frac{r+1}{2}} \frac{a_{2k-1} B_{2k}}{k} H^{2k} = -a_1 B_2 H^2 - \frac{1}{2} a_3 B_4 H^4 - \dots \quad (7)$$

Siendo $a_1 = g'(0)$ y $B_2 = \frac{1}{6}$ y $B_4 = -\frac{1}{30}$, entonces

$$\text{Var}(\hat{Q}) \simeq -\frac{1}{6} g'(0) H^2 + \frac{1}{60} a_3 H^4 - \dots$$

2.2.1. Estimación de la función covariograma

Ya hemos mencionado que no siempre es posible calcular directamente $g(h)$, por tanto, habrá que estimar esta función utilizando un modelo más simple que se pueda resolver.

Como se puede observar en la ecuación (7), si conseguimos una estimación de $a_1 = g'(0)$ obtendremos una estimación de la varianza. Para poder estimar este término nos basta con considerar el siguiente modelo de covariograma, un polinomio de segundo grado:

$$g(h) = a_0 + a_1 h + a_2 h^2.$$

Vamos a ver como se puede construir un estimador \hat{g} de g . Para ajustar los tres parámetros que tiene el modelo se necesitan tres puntos $\{(jH, \hat{g}(jH)); j = 0, 1, 2\}$. Hallar los valores exactos es difícil pero se propone un estimador de la siguiente forma:

$$g(jH) = \int_0^1 f(x) f(x + jH) dx \approx HC_j = \hat{g}(jH), \quad C_j = \sum_{i=0}^{m-j-1} f_i f_{i+j}, \quad f_i = f(z + iH), \quad (8)$$

siendo f_i la i -ésima sección del área observada en la abscisa i -ésima y m el número de secciones en total. Esta estimación proviene de la definición del covariograma $g(h) = \int_0^1 f(x) f(x + h) dx$ y la aproximación siguiente:

$$\begin{aligned} a_0 = g(0) &\approx HC_0 = H \sum_{i=0}^{m-1} f_i^2 \\ a_0 + a_1 H + a_2 H^2 = g(H) &\approx HC_1 = H \sum_{i=0}^{m-2} f_i f_{i+1} \\ a_0 + a_1 2H + a_2 (2H)^2 = g(2H) &\approx HC_2 = H \sum_{i=0}^{m-3} f_i f_{i+2} \end{aligned}$$

De donde la estimación \hat{a}_1 de a_1 se obtiene al sustituir el modelo de covariograma g por sus estimaciones $\hat{g}(jH)$. Es decir, $\hat{a}_1 = \frac{1}{2}(-3C_0 + 4C_1 - C_2)$. Al sustituir estas estimaciones en la ecuación (7) se consigue un estimador de la varianza.

$$\widehat{\text{Var}}(\hat{Q}) \approx -\frac{H^2}{6} \hat{a}_1 = \frac{H^2}{12} (3C_0 - 4C_1 + C_2), \quad (9)$$

O equivalentemente,

$$\widehat{\text{Var}}(\hat{Q}(z)) = \frac{H^2}{12} \left(3 \sum_{i=0}^{m-1} f_i^2 - 4 \sum_{i=0}^{m-2} f_i f_{i+1} + \sum_{i=0}^{m-3} f_i f_{i+2} \right).$$

Por último como $\widehat{Q}(z) = H \sum_{i=0}^{m-1} f_i$, entonces una estimación del coeficiente de error de la estimación de la varianza es:

$$\widehat{\text{CE}}(\widehat{Q}) = \frac{1}{2 \sum_{i=0}^{m-1} f_i} \sqrt{\frac{3 \sum_{i=0}^{m-1} f_i^2 - 4 \sum_{i=0}^{m-2} f_i f_{i+1} + \sum_{i=0}^{m-3} f_i f_{i+2}}{3}}.$$

En el caso de que no exista el parámetro a_1 , o que no sea posible de estimar, para obtener una estimación de la varianza habría que repetir este proceso pero con el modelo $g(h) = a_0 + a_2 h^2 + a_3 h^3$ con los mismos puntos de muestreo y el mismo estimador planteado en la ecuación (8), esto es:

$$\begin{aligned} g(0) &= a_0 \\ g(H) &= a_0 + a_2 H^2 + a_3 H^3 \\ g(2H) &= a_0 + a_2 (2H)^2 + a_3 (2H)^3 \end{aligned}$$

Despejando en las ecuaciones se obtiene el coeficiente $\hat{a}_3 = \frac{1}{4}(3C_0 - 4C_1 + C_2)$ y por último sustituyendo de nuevo en (7)

$$\widehat{\text{Var}}(\widehat{Q}) = \frac{H^4}{240} (3C_0 - 4C_1 + C_2). \quad (10)$$

Como se puede observar en este caso, cuando a_1 es nulo, la estimación de la varianza es veinte veces menor que la estimación de la varianza con el primer modelo (9).

2.3. Estimador en un espacio con reproductor Kernel en \mathbb{R}

Queremos construir otro estimador de la varianza en \mathbb{R} , para ello nos apoyaremos en el libro [Leobacher y Pillichshammer \[2014\]](#) que nos da una amplia teoría sobre el error del método Quasi-Monte Carlo. En especial, existen propiedades características del error de este método en espacios de Hilbert con kernel reproductor.

Consideremos el espacio de funciones en $[0, 1]$ en \mathbb{R} con la primera derivada integrable y lo denotamos \mathcal{H}_1 , definimos el producto escalar de $f, g \in \mathcal{H}_1$ como

$$\langle f, g \rangle := f(1)g(1) + \int_0^1 f'(x)g'(x) \, dx.$$

La norma correspondiente es $\|f\| := \sqrt{\langle f, f \rangle}$. En el caso de $f(x) := x$, entonces $\|f\| = \sqrt{2}$. Tomamos la función K_1 que es kernel reproductor para este espacio de Hilbert.

$$K_1(x, y) = 1 + \min(1 - x, 1 - y)$$

Como hemos descrito, el método Quasi-Monte Carlo (QMC) estima las integrales a través del sumatorio:

$$\int_0^1 f(x) \, dx \approx \frac{1}{m} \sum_{n=0}^{m-1} f(x_n) = Q_m(f),$$

siendo los x_n nodos de integración x_0, x_1, \dots, x_{m-1} elegidos en el intervalo $[0, 1]$. En nuestro caso partimos de la función de medida $f(z)$ normalizada de forma que su soporte $[0, 1]$ y poder aplicar la teoría de este método al covariograma $g(h)$ que aparece en la ecuación (4). Según [\[Leobacher y Pillichshammer, 2014, ecuación 3.9\]](#) este error se puede obtener a través del producto escalar de la función con un kernel reproductor K_1 de la siguiente manera

$$\text{Var}(\widehat{Q}) = \langle g, e \rangle, \quad e(x) = \int_0^1 K_1(x, y) \, dy - H \sum_{k=0}^{m-1} K_1(x, kH). \quad (11)$$

El teorema 1 implica que el covariograma se puede expresar como una suma infinita de funciones del tipo del Kernel reproductor. Por lo tanto, tiene sentido considerar el siguiente modelo del covariograma $g(h) = aK_1(h, b)$ con a y b dos constantes independientes. Para ajustar las variables hay que resolver el siguiente sistema:

$$\begin{aligned} g(0) &= a(1 + \min(1, 1 - b)) \\ g(H) &= a(1 + \min(1 - H, 1 - b)) \end{aligned}$$

Se puede resolver con la condición $0 < b < H$.

$$\begin{aligned} g(0) &= \int_0^1 f(z)^2 dz = a(2 - b) \\ g(H) &= \int_0^1 f(z)f(z + h) dz = a(2 - H) \end{aligned}$$

En este sistema se pueden despejar las constantes,

$$a = \frac{g(H)}{(2 - H)} \quad \text{y} \quad b = 2 - \frac{g(0)(2 - H)}{g(H)}. \quad (12)$$

De la ecuación anterior, se puede comprobar que la condición $0 < b < H$, siempre ya que $g(0) > g(H)$ por el lema 1, propiedad 2.

Sustituimos el modelo $g = aK_1(x, b)$ en la ecuación de la varianza (4).

$$\text{Var}_n(\hat{Q}) = H \sum_{k=0}^{n-1} g(kH) - \int_0^1 g(h) dh.$$

Primero calculemos la integral:

$$\begin{aligned} \int_0^1 g(h) dh &= \int_0^1 a(1 + \min(1 - h, 1 - b)) dh = \int_0^b a(1 + \min(1 - h, 1 - b)) dh + \\ &\int_b^1 a(1 + \min(1 - h, 1 - b)) dh = \int_0^b a(2 - b) dh + \int_b^1 a(2 - h) dh = \frac{a(3 - b^2)}{2}. \end{aligned}$$

En el sumatorio se tiene,

$$\begin{aligned} H \sum_{k=0}^{m-1} g(kH) &= H \sum_{k=0}^{m-1} a(1 + \min(1 - kH, 1 - b)) = aH(2 - b) + H \sum_{k=1}^{m-1} 2(a - kH) = \\ &= Ha(2 - b) + Ha(m - 1)\left(\frac{4 - mH}{2}\right) = aH\left((2 - b) + \frac{3(m - 1)}{2}\right). \end{aligned}$$

Finalmente obtenemos la varianza,

$$\text{Var}(\hat{Q}) = Ha\left((2 - b) + \frac{3(m - 1)}{2}\right) - \frac{a(3 - b^2)}{2} = 2a(H - 2Hb + 3b^2).$$

Si sustituimos a y b por los valores obtenidos en (12),

$$\text{Var}(\hat{Q}) = \frac{6g(0)^2(2 - H)}{g(H)} + 4g(0)(H - 6) + \frac{6g(H)(4 - H)}{(2 - H)}. \quad (13)$$

Por la función covariograma g se puede estimar en 0 y H a través de las aproximaciones vistas en (8),

$$g(0) \approx HC_0 = H \sum_{i=0}^{m-1} f_i^2 \quad \text{y} \quad g(H) \approx HC_1 = H \sum_{i=0}^{m-2} f_i f_{i+1}.$$

Entonces, sustituyendo g por sus estimaciones, el nuevo estimador de la varianza es:

$$\text{Var}(\hat{Q}) = 2H \left(\frac{3C_0^2(2 - H)}{C_1} + 2C_0(H - 6) + \frac{3C_1(4 - H)}{(2 - H)} \right). \quad (14)$$

3 Muestreo Sistemático y aleatorio en el círculo y en la esfera

En este capítulo analizaremos estimadores donde el parámetro de interés se puede expresar como una integral de línea en el círculo, después en el semicírculo y por último una integral de superficie en la esfera. Los obtendremos de dos maneras diferentes: la primera gracias a la estereología por diseño, siguiendo la información recogida en [Gual-Arnau y Cruz-Orive \[2000\]](#) y la segunda a partir de la teoría del error del método Quasi-Monte Carlo.

3.1. Muestreo sistemático y aleatorio en el círculo

Consideramos un objeto acotado por una curva cerrada, donde el área del objeto se puede expresar de la siguiente manera:

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2(\theta) \, d\theta,$$

siendo $r(\theta)$ el vector del radio del círculo, supuesto medible y con primera derivada continua desde su origen hasta la frontera. El objetivo de esta sección es estimar el valor del área a partir de muestras sistemáticas con más de un elemento ($m \geq 1$), con un ángulo constante $T = 2\pi/m$ y con valor inicial aleatorio y uniforme θ_0 . Entonces, el parámetro de interés es

$$Q = \int_0^{2\pi} f(\theta) \, d\theta,$$

con $f : [0, 2\pi) \mapsto \mathbb{R}^+$ una función medible, continua, periódica: $f(\theta) = f(\theta + 2k\pi)$, ($k \in \mathbb{Z}$) y con primera derivada continua (entonces está claro que $f \in \mathcal{H}_1$). Como hemos visto en el capítulo 2 aplicando el método de Cavalieri, un estimador insesgado de Q es:

$$\hat{Q}_m(\theta_0) = T \sum_{k=0}^{m-1} f(\theta_0 + kT) \quad \text{para } m \geq 1. \quad (15)$$

Donde θ_0 es una variable aleatoria uniforme en $[0, T)$. Como f está definida en un conjunto acotado con soporte finito, podemos definir la función covariograma en el círculo.

$$g(h) = \int_0^{2\pi} f(\theta)f(\theta + h) \, d\theta, \quad h \in [0, 2\pi).$$

Además cumple todas las propiedades del covariograma definidas en el lema 1, en particular las que más nos interesan en esta sección son:

1. El covariograma es periódico con periodo 2π , i.e. $g(h) = g(h + 2k\pi) = g(-h + 2k\pi) \quad \forall k \in \mathbb{Z}$,
2. $\int_0^{2\pi} g(h) \, dh = Q^2$.

Entonces podemos desarrollar todas las fórmulas obtenidas en el capítulo anterior a partir del covariograma pero adaptándolas al círculo. Por lo tanto la varianza del estimador es:

$$\text{Var}(\hat{Q}_m(\theta_0)) = T \sum_{k=0}^{m-1} g(kT) - \int_0^{2\pi} g(h) \, dh.$$

Reiteramos que esta fórmula no es muy apropiada porque, incluso conociendo f , puede que sea muy difícil evaluar g .

3.1.1. Representación exacta de la varianza

Sabemos que se puede realizar el desarrollo en series de Fourier de la función de medida porque $f \in \mathcal{H}_1$, que es un espacio de Hilbert. Entonces su desarrollo es $s_f(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta)$ con período 2π y con los coeficientes de Fourier:

$$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \, d\theta = \frac{Q}{2\pi}, \quad a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos(k\theta) \, d\theta \quad \text{y} \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin(k\theta) \, d\theta, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Esta serie cumple la identidad $s_f(\theta) = f(\theta)$ y también cumple que

$$\int_0^{2\pi} s_f(\theta) \, d\theta = \int_0^{2\pi} f(\theta) \, d\theta = Q.$$

Por lo tanto, para la mayoría de ángulos iniciales aleatorios θ_0 un estimador de Q es

$$\hat{Q}_m(\theta_0) = T \sum_{k=0}^{m-1} s_f(\theta_0 + kT). \quad (16)$$

En la definición de varianza $\text{Var}(\hat{Q}_m(\theta_0)) = E[\hat{Q}_m(\theta_0)^2] - Q^2 = E[\hat{Q}_m(\theta_0)^2] - 4a_0^2\pi^2$ podemos emplear el nuevo estimador de Q siguiendo la ecuación (16):

$$E \left[T^2 \left(\sum_{k=0}^{m-1} s_f(\theta_0 + kT) \right)^2 \right] = T^2 \sum_{k=0}^{m-1} \left(a_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + b_k^2 \right).$$

En la última igualdad se ha aplicado la identidad de Parseval (1), acabamos de obtener otra expresión exacta de la varianza con los coeficientes de Fourier

$$\text{Var}(\hat{Q}_m(\theta_0)) = 2\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} (a_{km}^2 + b_{km}^2). \quad (17)$$

Como vimos en el capítulo anterior las series de Fourier también se pueden expresar en su forma exponencial:

$$s_f(\theta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ik\theta}, \quad \text{con} \quad c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\theta) e^{-ik\theta} \, d\theta.$$

Con esta notación, se puede reescribir la ecuación (17) y se obtiene la varianza de $\hat{Q}_m(\theta_0)$, ya que $\frac{1}{2}(a_{km} + ib_{km}) = c_{km}$:

$$\text{Var}(\hat{Q}_n(\theta_0)) = 8\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} c_{km} \bar{c}_{km} = 8\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} |c_{km}|^2.$$

Si la serie de Fourier s_f de f es finita, es decir, si:

$$s_f(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^N a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta) \quad \text{siendo } N \text{ un número natural,}$$

entonces gracias a (17), sabemos que la varianza será 0 si el número de muestras es mayor que N .

Por [Gual-Arnau y Cruz-Orive, 2000, Proposición 2.6] se concluye que el desarrollo en series de Fourier de la función covariograma $g(h)$ es:

$$s_g(\theta) = d_0 + \sum_{k=1}^{\infty} d_k \cos(kh), \quad d_0 = 2\pi a_0^2, \quad d_k = \pi(a_k^2 + b_k^2), \quad k \in \mathbb{N}.$$

Esto deriva de que $g(h)$ es una función par.

Corolario 1. La varianza del estimador \hat{Q}_m se puede expresar como suma de los coeficientes de Fourier del covariograma de la siguiente forma: $\text{Var}(\hat{Q}_m(\theta_0)) = 2\pi \sum_{k=1}^{\infty} d_{km}$ con $d_{km} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(h) \cos(kmh) dh$.

Demostración. Como $\text{Var}(\hat{Q}_m(\theta_0)) = 2\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} (a_{km}^2 + b_{km}^2)$ entonces

$$\begin{aligned} d_{km} &= \pi(a_{km}^2 + b_{km}^2) = \pi \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos(km\theta) d\theta \right)^2 + \pi \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin(km\theta) d\theta \right)^2 = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(h) \cos(kmh) dh + \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(h) \sin(kmh) dh = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(h) \cos(kmh) dh. \end{aligned}$$

El último paso se obtiene aplicando la tercera propiedad del lema 1 y que la función $g(h)$ es par. Con esto obtenemos el resultado y se acaba la demostración. \square

Ejemplo: Curva cardioide

Supongamos que queremos estimar el área acotada por la curva cardioide, con ecuación polar: $r(\theta) = 1 - a \cos(\theta)$, con $0 \leq a \leq 1$ y $0 \leq \theta < 2\pi$. Entonces el parámetro de interés es:

$$Q = \int_0^{2\pi} r^2(\theta) d\theta = \int_0^{2\pi} (1 - a \cos(\theta))^2 d\theta = 2\pi + \pi a^2.$$

En este caso la función de medida es $f(\theta) = (1 - a \cos(\theta))^2$ y su serie de Fourier tiene coeficientes:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{Q}{2\pi} = 1 + \frac{a^2}{2}, \\ a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (1 - a \cos(\theta))^2 \cos(k\theta) d\theta = \begin{cases} -2a & \text{para } k = 1 \\ \frac{a^2}{2} & \text{para } k = 2 \\ 0 & \text{para } k > 2 \end{cases} \\ b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (1 - a \cos(\theta))^2 \sin(k\theta) d\theta = 0. \end{aligned}$$

Entonces la serie de Fourier para esta función (cálculos en el apéndice 5):

$$s_f(\theta) = 1 + \frac{a^2}{2} - 2a \cos(\theta) + \frac{a^2 \cos(2\theta)}{2}.$$

Si el número de muestras es mayor que dos, la varianza es cero. Aplicando directamente cualquiera de las fórmulas anteriores se puede obtener la varianza, por ejemplo a partir de la ecuación (17):

$$\text{Var}(\hat{Q}_1(\theta_0)) = 2\pi^2 \sum_{k=1}^2 a_k^2 = 8\pi^2 a^2 + \frac{\pi^2 a^4}{2} \text{ y } \text{Var}(\hat{Q}_2(\theta_0)) = \frac{\pi^2 a^4}{2}.$$

3.1.2. Estimación de la varianza

La finalidad es estimar la varianza de $\widehat{Q}_m(\theta_0)$, para mayor comodidad lo denotaremos por

$$\widehat{Q}_m = T(f_0 + f_1 + \dots + f_{m-1}), \text{ con } f_i = f(\theta_0 + iT), \quad i = 0, \dots, m-1.$$

Como ya hemos visto, una aproximación efectiva es modelar el covariograma por un polinomio. Elegimos el siguiente polinomio:

$$g_r(h) = \sum_{i=0}^{r+1} \beta_{2i} h^{2i} + \beta_{2r+1} h^{2r+1} \quad \text{con } r \in \mathbb{N}.$$

Sabemos que $g_r(h) = g_r(2\pi - h)$ y las incógnitas β son constantes que cumplen las siguientes igualdades:

1. $\beta_{2r+1} = -2\pi(r+1)\beta_{2r+2}$,
2. $\beta_{2i} = \beta(i; m)\beta_{2r+2}$, con $\beta(i; r) = (2\pi)^{2(r-i+1)} \binom{2r+2}{2i} B_{2(r-i+1)}$, $i \in \mathbb{N}$ y B_k el número de Bernoulli k .

La demostración de estas igualdades está detallada en el apéndice 6 y está tomada de [Abramovich y Stegun \[1964\]](#). Si sustituimos en el polinomio inicial $g_r(h)$ las equivalencias, el modelo pasa a ser:

$$g_r(h) = \beta_0 + \beta_{2m+2} \left(\sum_{i=1}^{m+1} \beta(i; m) h^{2i} - 2\pi(m+1) h^{2m+1} \right). \quad (18)$$

En particular para $m = 0$; $g_0(h) = \beta_0 - 2\pi\beta_2 h + \beta_2 h^2$ y para $m = 1$; $g_1(h) = \beta_0 + 4\pi^2\beta_4 h^2 - 4\pi\beta_4 h^3 + \beta_4 h^4$.

Sustituyendo $g(h)$ por $g_r(h)$ en el corolario 1 e integrando directamente se obtiene:

$$d_{km,r} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g_r(h) \cos(kmh) \, dh = -\frac{2(2r+1)!}{\pi(km)^{2r+2}} \beta_{2r+1}.$$

Donde se puede hallar la varianza con estos nuevos coeficientes $d_{km,r}$

$$\text{Var}_r(\widehat{Q}_m) = \sum_{k=1}^{\infty} -\frac{4\beta_{2r+1}(2r+1)!}{(km)^{2r+2}}.$$

Sabiendo que el número de Bernoulli $B_{2r+2}(0) = \frac{2(-1)^{2r+3}\Gamma(2r+3)}{(2\pi)^{2r+2}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{2r+2}}$ (ver apéndice 3) y utilizando la propiedad de la función $\Gamma(n) = (n-1)!$, entonces se obtiene que

$$\text{Var}_r(\widehat{Q}_m) = -\frac{2B_{2r+2}(2\pi)^{2r+2}\beta_{2r+1}}{m^{2r+2}(2r+2)} = -\frac{T^{2r+2}B_{2r+2}\beta_{2r+1}}{r+1}. \quad (19)$$

Para obtener el valor de β_{2r+1} es suficiente con resolver el sistema lineal formado por $g_r(0)$ y $g_r(T)$. Además $\beta_{2r+1} = -2\pi(r+1)\beta_{2r+2}$, lo que implica

$$\beta_{2r+1} = \frac{-2\pi(r+1)[g_r(0) - g_r(T)]}{2\pi(r+1)T^{2r+1} - \sum_{i=1}^{r+1} \beta(i; r)T^{2i}}. \quad (20)$$

Un estimador insesgado de $g(jT)$ se puede hallar análogamente al visto en la ecuación (8) pero esta vez se utiliza para ajustar los parámetros del modelo de covariograma definido en la ecuación (18),

$$\hat{g}(jT) = TC_j, \quad C_j = \sum_{i=0}^{m-1} f_i f_{i+j}, \quad f_i = f(\theta_0 + iT), \quad j = 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor.$$

Hay simetría entre los valores C_j ya que $f_i = f_{i+m}$ y de esta igualdad se deduce que $C_{n+i} = C_{n-i} = C_i$. Una estimación $\hat{\beta}_{2r+1}$ de β_{2r+1} se obtiene al reemplazar $g_r(0)$ y $g_r(T)$ por sus estimaciones $\hat{g}_r(0)$ y $\hat{g}_r(T)$ en (20). Para calcular el estimador de $\text{Var}_r(\hat{Q}_m)$, basta con sustituir β_{2r+1} por $\hat{\beta}_{2r+1}$ en la ecuación (19).

$$\begin{aligned}\widehat{\text{Var}}_r(\hat{Q}_m) &= -\frac{T^{2r+2}B_{2r+2}}{r+1} \frac{-2\pi(r+1)[\hat{g}_r(0) - \hat{g}_r(T)]}{2\pi(r+1)T^{2r+1} - \sum_{i=1}^{r+1} \beta(i; r)T^{2i}} = \\ &= \frac{4\pi^2 B_{2r+2}(C_0 - C_1)}{(r+1)m^2 - \sum_{i=0}^r \binom{2r+2}{2i} B_{2i}m^{2i+1}}, \text{ para } m \geq 2. \quad (21)\end{aligned}$$

Ejemplo: Curva en polares

Nuestro parámetro de interés es el área encerrada por la siguiente curva, con ecuación polar $r(\phi) = 1 + a|\phi - \pi|$, $a > 0$ y $0 \leq \phi < 2\pi$. Lo que equivale a aproximar la siguiente integral

$$Q = \int_0^{2\pi} r^2(\phi) d\phi = 2\pi(1 + a\pi + \frac{a^2\pi^2}{3}).$$

Procedemos al calculo de la varianza mediante la serie de Fourier:

$$\text{Var}_r(\hat{Q}_m) = \begin{cases} \frac{4\pi^4 a^2}{45n^4} (15 + 15\pi a + 4\pi^2 a^2) & m = 1, 3, \dots \\ \frac{16\pi^6 a^4}{45n^4} & m = 2, 4, \dots \end{cases}$$

Primero, obtengamos una estimación de la varianza a partir de la ecuación (21) con $r = 1$.

$$\begin{aligned}\widehat{\text{Var}}_1(\hat{Q}_m) &= \frac{2\pi^2(C_0 - C_1)}{15m(m-1)^2}, \quad \widehat{\text{Var}}_1(\hat{Q}_2) = \frac{\pi^2(f_0 - f_1)^2}{15}, \\ \widehat{\text{Var}}_1(\hat{Q}_3) &= \frac{\pi^2(f_0^2 + f_1^2 + f_2^2 - (f_0f_1 + f_1f_2 + f_2f_0))}{90}.\end{aligned}$$

Calculando la esperanza podemos ver si este estimador de la varianza tiene sesgo nulo.

$$\begin{aligned}E[\widehat{\text{Var}}_1(\hat{Q}_2)] &= \int_0^\pi \widehat{\text{Var}}_1(\hat{Q}_2(\theta)) \frac{d\theta}{\pi} = \frac{\pi^6 a^2}{45} \left(\frac{2}{\pi} + a\right)^2, \\ E[\widehat{\text{Var}}_1(\hat{Q}_3)] &= \int_0^\pi \widehat{\text{Var}}_1(\hat{Q}_3(\theta)) \frac{3 d\theta}{2\pi} = \frac{4\pi^4 a^2}{3645} (15 + 15\pi a + 4\pi^2 a^2).\end{aligned}$$

Entonces se observa que el estimador es insesgado para $m = 3$, pero no para $m = 2$. Sabemos que el estimador de Q es insesgado, pero no podemos asegurar que el estimador de la varianza de Q lo sea también, como acabamos de probar.

Ahora consideremos el estimador de la varianza en \mathbb{R} con el modelo de covariograma $g_r(h)$ en $r = 1$ y con $m = 3$ para poder comparar estos estimadores. $g_1(h) = \beta_0 + 4\pi^2\beta_3h^2 - 4\pi\beta_3h^3 + \beta_3h^4$ donde $g'_1(0) = 0$, entonces se tiene que utilizar el estimador (10). En este caso el período H pasa a ser el período en el círculo con $m = 3$, es decir, $T = \frac{2\pi}{3}$. Se tiene que:

$$\widehat{\text{Var}}_1(\hat{Q}_3) = \frac{\pi^2}{180} (f_0^2 + f_1^2 + f_2^2 - (f_0f_1 + f_1f_2 + f_2f_0)).$$

Se aprecia que el estimador de la varianza en \mathbb{R} nos da una estimación que es la mitad de la estimación de la varianza en el círculo con el estimador (21).

3.1.3. Estimador en un espacio con reproductor Kernel en el círculo

Como hemos visto, la función de medida f es continua y con primera derivada continua, por lo tanto es integrable y $f \in \mathcal{H}_1$, entonces podemos aplicar la teoría del error del método Quasi-Monte Carlo.

Para poder hacer uso de esta teoría solo necesitamos que la función de medida sea continua con su primera derivada integrable mientras que para los estimadores que hemos ido desarrollando a lo largo de este capítulo necesitan que la función sea continua con primera derivada continua. Por lo que este método tiene menos restricciones que los métodos empleados en [Gual-Arnau y Cruz-Orive \[2000\]](#). Por este motivo consideraremos siempre funciones de medida que cumplan estas características más restrictivas para poder estudiar su relación y compararlos.

Un estimador del error se obtiene ajustando el covariograma g por un modelo. Según [\[Leobacher y Pillichshammer, 2014, remark 4.19\]](#) los polinomios de Bernoulli son kernel reproductores, entonces podremos utilizar estos polinomios para modelar el covariograma. Aplicando el teorema de Moore-Aronszajn (Teorema 1), el covariograma se puede aproximar como una suma de las funciones definidas mediante los polinomios de Bernoulli. Nuestro objetivo es aplicar el teorema de Moore-Aronszajn para un polinomio de Bernoulli y ajustar los parámetros de este modelo.

Dicho esto, consideramos el kernel reproductor $K = g_r(|x - y|)$ a partir del cual crearemos dos estimadores de la varianza para dos modelos del covariograma diferentes: el polinomio de Bernoulli $g_0(x)$ y $g_1(x)$. Sustituyendo esos valores en la ecuación (11) con $K_1(x, y) = K$ y g_r como $g_0(x)$ y $g_1(x)$, que serán los dos modelos considerados:

$$g_0(x) = \frac{1}{6} - x + x^2, \quad g_1(x) = \frac{1}{30} + x^2 - 2x^3 + x^4.$$

El kernel reproductor está definido como

$$g_r(|x - y|) = \left(\sum_{i=1}^{2r+1} \binom{r+1}{i} B_{2r+1-i}(x - y)^i \right). \quad (22)$$

Entonces para ambos casos $g_i(x)$, $i = 0, 1$:

$$\text{Var}_i(\hat{Q}) = \langle g_i(x), \int_0^1 g_r(|x - y|) dy - T \sum_{k=0}^{m-1} g_r(|x - kT|) \rangle.$$

Entonces como los modelos son de la forma $\beta_0 + \beta_{2r+2}g_r(x)$,

$$\begin{aligned} \text{Var}_i(\hat{Q}) &= \langle \beta_0 + \beta_{2i+2}g_r(x), \int_0^1 g_r(|x - y|) dy - T \sum_{k=0}^{m-1} g_r(|x - kT|) \rangle = \\ &\langle \beta_0, \int_0^1 g_r(|x - y|) dy - T \sum_{k=0}^{m-1} g_r(|x - kT|) \rangle + \langle \beta_{2i+2}g_r(x), \int_0^1 g_r(|x - y|) dy - T \sum_{k=0}^{m-1} g_r(|x - kT|) \rangle. \end{aligned} \quad (23)$$

Si tomamos el primer término de esta ecuación y aplicamos [\[Leobacher y Pillichshammer, 2014, Propiedad 3.8\]](#) que permite permutar el producto escalar y la integral de un espacio con Kernel reproductor, entonces

$$\begin{aligned} \langle \beta_0, \int_0^1 g_r(|x - y|) dy - T \sum_{k=0}^{m-1} g_r(|x - kT|) \rangle &= -\langle \beta_0, \int_0^1 g_r(|x - y|) dy \rangle + \langle \beta_0, T \sum_{k=0}^{m-1} g_r(|x - kT|) \rangle = \\ &= -\int_0^1 \langle \beta_0, g_r(|x - y|) \rangle dy + T \sum_{k=0}^{m-1} \langle \beta_0, g_r(|x - y|) \rangle. \end{aligned}$$

Gracias a la segunda propiedad de los Kernel se tiene que $\langle \beta_0, g_r(|x - y|) \rangle = \beta_0$ porque β_0 es una constante,

$$- \int_0^1 \langle \beta_0, g_r(|x - y|) \rangle dy + T \sum_{k=0}^{m-1} \langle \beta_0, g_r(|x - y|) \rangle = - \int_0^1 \beta_0 dy + T \sum_{k=0}^{m-1} \beta_0 = -\beta_0 + Tm\beta_0 = 0.$$

Por otro lado, tomando la segunda parte de la ecuación (23) y repitiendo el proceso, es decir, aplicando la segunda propiedad de los Kernel reproductores: $\langle g_r(x), g_r(|x - s|) \rangle = g_r(s)$, se concluye que

$$\begin{aligned} & - \langle \beta_{2i+2} g_r(h), \int_0^1 g_r(|x - y|) dy \rangle + \langle \beta_{2i+2} g_r(h), T \sum_{k=0}^{m-1} g_r(|h - kT|) \rangle = \\ & - \beta_{2i+2} \int_0^1 \langle g_r(h), g_r(|x - y|) dy \rangle + \beta_{2i+2} T \sum_{k=0}^{m-1} \langle g_r(h), g_r(|h - kT|) \rangle = \\ & - \beta_{2i+2} \int_0^1 g_r(y) dy + T \beta_{2i+2} \sum_{k=0}^{m-1} g_r(kT) = \beta_{2i+2} \left(T \sum_{k=0}^{m-1} g_r(kT) - \int_0^1 g_r(y) dy \right). \end{aligned}$$

Ahora podemos hallar la varianza para los modelos que derivan de g_0 y g_1 respectivamente. En primer lugar para el caso g_0 :

$$\begin{aligned} \text{Var}_0(\hat{Q}) &= \beta_2 \left(- \int_0^1 g_0(y) dy + T \sum_{k=0}^{m-1} g_0(kT) \right) = \beta_2 \left(- \int_0^1 y^2 - y dy + T \sum_{k=0}^{m-1} (kT)^2 - (kT) \right) = \\ &= \beta_2 \left(- \frac{1}{6} - \frac{m(m-1)T^2}{2} + \frac{T^3 m(m-1)(2m-1)}{6} \right) = \beta_2 \left(\frac{m^2 - 1}{6m^2} - \frac{1}{6} \right) = \frac{-\beta_2}{6m^2} \end{aligned}$$

Para obtener el valor de β_2 hay que resolver el siguiente sistema:

$$g_0(0) = \beta_0, \quad g_0(T) = \beta_0 - \beta_2 T + T^2 \beta_2.$$

Entonces

$$\beta_2 = \frac{g_0(0) - g_0(T)}{T(1 - T)} = \frac{m^2(g_0(0) - g_0(T))}{m - 1}$$

y finalmente para $g_0(x)$ se tiene que

$$\text{Var}_0(\hat{Q}) = \frac{g_0(0) - g_0(T)}{6(m - 1)}$$

Podemos estimar la varianza reemplazando $g(0)$ y $g(T)$ por sus estimaciones $\hat{g}(0)$ y $\hat{g}(T)$ dadas por la ecuación (8) $\hat{g}_j \approx Tg(j)$,

$$\widehat{\text{Var}}_0(\hat{Q}) = \frac{C_0 - C_1}{6m(m - 1)}. \quad (24)$$

Ahora, obtengamos la varianza para el caso $i = 1$

$$\begin{aligned} \text{Var}_1(\hat{Q}) &= \beta_4 \left(- \int_0^1 y^4 - 2y^3 + y^2 dy + T \sum_{k=0}^{m-1} (kT)^4 - 2(kT)^3 + (kT)^2 \right) = \\ &= \beta_4 \left(\frac{-1}{30} + \frac{T^5 m(m-1)(2m-1)(3m^2 - 3m - 1)}{30} - \frac{T^4 m^2(m-1)^2}{2} + \frac{T^3 m(m-1)(2m-1)}{6} \right) \\ &= \beta_4 \left(\frac{m^4 - 1}{30m^4} - \frac{1}{30} \right) = \frac{-\beta_4}{30m^4}. \end{aligned}$$

Donde β_4 lo obtenemos del sistema

$$g_1(0) = \beta_0, \quad g_1(T) = \beta_0 + \beta_4 T^2 - 2\beta_4 T^3 + T^4 \beta_4$$

Entonces

$$\beta_4 = \frac{g_1(0) - g_1(T)}{T^2(T-1)^2} = \frac{m^4(g_1(0) - g_1(T))}{(m-1)^2}$$

y la varianza es:

$$\text{Var}_1(\widehat{Q}) = \frac{g_1(0) - g_1(T)}{30(m-1)^2}.$$

Para obtener la estimación de la varianza tendremos que usar de nuevo las estimaciones de la función g , como acabamos de realizar.

$$\widehat{\text{Var}}_1(\widehat{Q}) = \frac{C_0 - C_1}{30m(m-1)^2}. \quad (25)$$

Como se puede observar estas formulas multiplicadas por el factor $4\pi^2$ son iguales a las obtenidas en (21) para $i = 0, 1$. Esto es debido a que en este caso el período se encuentra en el intervalo $[0, 1)$ y no en el $[0, 2\pi)$.

3.2. Muestreo sistemático y aleatorio en el semicírculo

En este caso el parámetro de interés va a ser la integral $Q = \int_0^\pi f(\theta) d\theta$, con la función medible $f : [0, \pi) \mapsto \mathbb{R}^+$ que es una función periódica con período π , continua y con primera derivada continua en el intervalo $[0, \pi)$.

Las definiciones anteriores del estimador insesgado \widehat{Q}_m de Q , del covariograma $g(h)$ y de la varianza de \widehat{Q}_m se pueden extender al semicírculo cambiando 2π por π y el período de muestreo por $T = \frac{\pi}{m}$. También se puede escribir las series de Fourier asociadas reemplazando 2π por π y $k\theta$ y kh por $2k\theta$ y $2kh$ respectivamente.

3.2.1. Aproximación y estimación de la varianza

Una manera simple de extender la aproximación de la varianza del círculo al semicírculo es considerar las m observaciones sistemáticas $\{f_k : k = 0, 1, \dots, m-1\}$ del semicírculo como las m sumas $\{f_k + f_{k+m} : k = 0, 1, \dots, m-1\}$ construidas respectivamente a partir de las $2m$ observaciones sistemáticas del círculo.

El modelo de g_r para el covariograma en el semicírculo es igual al modelo del círculo pero simplemente hay que reemplazar 2π por π . La mismo se realiza para obtener las propiedades de β . Finalmente, la aproximación de la varianza pasa a ser:

$$\widehat{\text{Var}}_r(\widehat{Q}_m) = \frac{\pi^2 B_{2r+2}(C_0 - C_1)}{2((r+1)m^2 - \sum_{i=0}^r \binom{2r+2}{2i} B_{2i} m^{2i+1})}, \text{ con } m \geq 2, \quad (26)$$

donde m es el tamaño de la muestra en el semicírculo. Además los C_j se definen igual que en el círculo, pero siendo cada f_k la k -ésima observación en el semicírculo. Por lo que cada C_i definido en el semicírculo pasa a ser la mitad del C_i definido en el círculo.

En el caso del estimador en un espacio de Hilbert con kernel reproductor, este estimador es análogo a los estimadores (24) y (25), pero multiplicados por un factor π^2 , debido a que en este caso el período se encuentra en $[0, \pi)$. Por lo que es el estimador es una versión multiplicada por un factor de escala de (26) para $r = 0$ y $r = 1$ respectivamente.

3.3. Muestreo sistemático y aleatorio en la esfera

Sean (ϕ, θ) las variables de las coordenadas polares de la esfera:

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\phi) \sin(\theta), \\ y &= r \sin(\phi) \sin(\theta), \\ z &= r \cos(\theta). \end{aligned}$$

Si consideramos un subconjunto de volumen V en \mathbb{R}^3 , se tiene que:

$$V = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^3(\phi, \theta) \sin(\theta) \, d\theta \, d\phi,$$

donde $r(\phi, \theta)$ es una función medible que representa el vector del radio desde un punto interior hasta la frontera. Tomando una función real definida en la esfera unidad (\mathbb{S}^2), $f : \mathbb{S}^2 \mapsto \mathbb{R}$ continua y con primera derivada continua, el área en la esfera es $dw = \sin(\theta) \, d\phi \, d\theta$. Por lo tanto el parámetro de interés en esta sección es:

$$Q = \int_{\mathbb{S}^2} f \, dw = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\phi, \theta) \sin(\theta) \, d\theta \, d\phi.$$

Queremos construir una estimador insesgado de Q a través de una muestra sistemática y aleatoria en la esfera. Sabemos que la estimación será más sencilla si f es periódica, al poder extender algunas de las propiedades vistas en el muestreo sistemático en el círculo y semicírculo. La función de medida f es 2π periódica en ϕ , es decir:

$$f(\phi, \theta) = f(\phi + 2k\pi, \theta), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad \phi \in [0, 2\pi), \quad \theta \in [0, \pi),$$

pero solamente es periódica en θ con periodo 2π , que no coincide con los límites de integración. Entonces nos interesa escribir una nueva función con período $[0, 2\pi) \times [0, \pi)$ en la esfera. Esto se puede lograr realizando la media de los valores de f con sus puntos antipodales,

$$F(\phi, \theta) = \frac{1}{2} [f(\phi, \theta) + f(\phi + \pi, \pi - \theta)],$$

así obtenemos una función periódica

$$F(\phi, \theta) = F(\phi + 2k\pi, \theta + l\pi), \quad k, l \in \mathbb{Z}.$$

Entonces podemos reescribir el parámetro de interés Q como

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi F(\phi, \theta) \sin(\theta) \, d\theta \, d\phi.$$

El muestreo sistemático con período constante, sería apropiado para ϕ pero no para θ , porque la probabilidad al elegir un punto aleatorio (ϕ, θ) en la esfera sería proporcional a $\sin(\theta) \, d\theta \, d\phi$. Entonces en vez de utilizar un período constante en θ usaremos un período constante en $y = \cos(\theta)$, con $-1 < y \leq 1$. Finalmente, el parámetro de interés pasa a ser:

$$Q = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 F(\phi, \arccos(y)) \, dy \, d\phi. \quad (27)$$

Realizaremos el muestreo sistemático en la esfera con periodo $T_1 = \frac{2\pi}{m_1}$ y $T_2 = \frac{2}{m_2}$ para ϕ y y respectivamente. Sea (ϕ_0, y_0) un punto aleatorio e independiente del rectángulo $[0, T_1) \times [1 - T_2, 1)$, una muestra sistemática y aleatoria en la esfera es:

$$\{F(\phi_i, \arccos(y_j)) : i = 0, \dots, m_1 - 1, j = 0, \dots, m_2 - 1\}, \text{ siendo } \phi_i = \phi_0 + iT_1, \quad i = 0, \dots, m_1 - 1 \\ \text{y } y_j = y_0 - jT_2, \quad (\theta_j = \arccos(y_j) \in [0, \pi)), \quad j = 0, \dots, m_2 - 1.$$

Proposición 1. *Un estimador insesgado de Q es:*

$$\hat{Q}(\phi_0, y_0) = T_1 T_2 \sum_{i=0}^{m_1-1} \sum_{j=0}^{m_2-1} F(\phi_i, \arccos(y_j)).$$

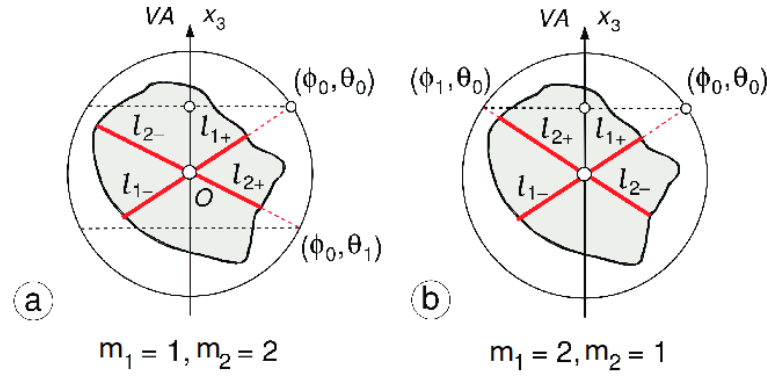


Ilustración 4: Ejemplo de muestras sistemáticas en la esfera. A la izquierda con $m_1 = 1, m_2 = 2$ y a la derecha con $m_1 = 2, m_2 = 1$.

Demostración. La fórmula se deduce directamente de la ecuación (15) y de la muestra sistemática y aleatoria de la esfera. Como el estimador del volumen de un objeto es igual a la sumas de las áreas de intersección entre el objeto y la sonda (las áreas de intersección l_i en la ilustración 4). \square

Entonces una muestra sistemática en la esfera consta de $m_1 m_2$ observaciones y cada observación es la media de los valores de dos puntos antipodales de f . Si consideramos el ejemplo que vimos al inicio de este apartado (3.3) y queremos obtener su estimador para $m_1 = 2$ y $m_2 = 1$, sus periodos serían $T_1 = \pi$ y $T_2 = 2$ y su estimador:

$$\hat{Q} = \frac{2\pi}{3}(r^3(\phi_0, \theta_0) + r^3(\phi_0 + \pi, \pi - \theta_0)), \text{ con } \phi_0 \sim UR[0, \pi), \theta_0 = \arccos(y_0), y_0 \sim UR[-1, 1).$$

Como en el caso del muestreo en \mathbb{R} , estamos interesados en conseguir una fórmula para la predicción de varianza. Vamos ahora a introducir una generalización del covariograma para varias dimensiones, que nos será de utilidad para definir esta fórmula.

Definición 5. Se define la función covariograma $g(h_1, h_2)$ en la esfera como:

$$g(h_1, h_2) = \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 F(\phi, \arccos(y)) F(\phi + h_1, \arccos(y - h_2)) dy d\phi, \quad (h_1, h_2) \in [0, 2\pi) \times [-1, 1).$$

Cumple las propiedades del covariograma, en particular:

1. Es una función periódica en los dos argumentos $g(h_1, h_2) = g(\pm h_1 + 2k\pi, \pm h_2 + 2l)$, $k, l \in \mathbb{Z}$,
2. $\int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 g(h_1, h_2) dh_2 dh_1 = Q^2$.

Estas igualdades se deducen de la periodicidad de F y de las propiedades de la función covariograma. Ahora podemos definir la varianza del estimador de Q en la esfera.

Proposición 2. $\text{Var}(\hat{Q}(\phi_0, y_0)) = T_1 T_2 \sum_{i=0}^{m_1-1} \sum_{j=0}^{m_2-1} g(iT_1, jT_2) - \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 g(h_1, h_2) dh_1 dh_2$.

Demostración. Teniendo en cuenta que

$$\text{Var}(\hat{Q}(\phi_0, y_0)) = \frac{1}{T_1 T_2} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \hat{Q}(\phi_0, \theta_0)^2 d\phi d\theta - Q^2,$$

esta demostración se realiza de forma análoga a la que realizamos en las secciones anteriores pero con $F(\phi, \theta)$ y T_1 y T_2 .

$$\begin{aligned} & \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \hat{Q}(\phi_0, \theta_0)^2 d\phi d\theta = \\ & = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi T_1^2 T_2^2 \sum_{k=0}^{m_1-1} \sum_{s=0}^{m_2-1} \sum_{l=0}^{m_1-1} \sum_{p=0}^{m_2-1} F(\phi_0 + kT_1, \arccos(y_0 - sT_2)) F(\phi_0 + lT_1, \arccos(y_0 - pT_2)) dy d\phi, \end{aligned}$$

como k, s, l y $p \in \mathbb{N}$, entonces sin pérdida de generalidad $l = k + i$ y $p = s + j$ con $j, i \in \mathbb{N}$.

$$\begin{aligned} & T_1^2 T_2^2 \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \sum_{k=0}^{m_1-1} \sum_{s=0}^{m_2-1} \sum_{k=0}^{m_1-1} \sum_{s=0}^{m_2-1} F(\phi_0 + kT_1, \arccos(y_0 - sT_2)) F(\phi_0 + kT_1 + iT_1, y_0 - sT_2 - jT_2) dy d\phi = \\ & = T_1^2 T_2^2 \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \sum_{k=0}^{m_1-1} \sum_{s=0}^{m_2-1} F(x, \arccos(r)) F(x + iT_1, \arccos(r - jT_2)) dr dx = T_1^2 T_2^2 \sum_{k=0}^{m_1-1} \sum_{s=0}^{m_2-1} g(iT_1, jT_2). \end{aligned}$$

Con esto queda demostrado el resultado. \square

3.3.1. Representación exacta de la varianza

Como F es integrable en la esfera unidad y admite derivadas de segundo orden continuas, se puede escribir sus funciones armónicas en la esfera. Por la definición de armónicos esféricos se tiene que las siguientes series convergen uniformemente y absolutamente en la esfera unidad

$$\begin{aligned} F(\phi, \theta) &= \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l a_{lk} Y_l^k(\theta, \phi), \text{ donde } a_{lk} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi F(\phi, \theta) \overline{Y_l^k}(\theta, \phi) \sin(\theta) d\theta d\phi, \text{ y la función} \\ Y_l^k(\theta, \phi) &= C_{lk} e^{ik\theta} P_l^k(\cos(\theta)) \text{ con } (-l \leq k \leq l), \text{ con } C_{lk} = (-1)^k \left[\frac{(2l+1)(l-k)!}{4\pi(l+k)!} \right]^{\frac{1}{2}}, (-l \leq k \leq l). \end{aligned}$$

Donde $P_l^k(x)$ es la función de Legendre asociada cuya definición es $P_l^k(x) = (-1)^k (1-x^2)^{\frac{k}{2}} \frac{d^k}{dx^k} (P_l(x))$. Los armónicos esféricos cumplen las siguientes propiedades:

1. $\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \overline{Y_l^k}(\theta, \phi) Y_{l'}^{k'}(\theta, \phi) \sin(\theta) d\theta d\phi = \delta_{ll'} \delta_{kk'}$
2. $\overline{Y_l^k}(\theta, \phi) = (-1)^k Y_l^{-k}(\theta, \phi)$,
3. $Y_l^k(\pi - \theta, \phi + \pi) = (-1)^l Y_l^k(\theta, \phi)$.

La primera propiedad implica que los armónicos esféricos constituyen un sistema ortogonal en \mathbb{S}^2 . Utilizando la tercera propiedad, la definición de a_{lk} y la definición de F .

$$a_{lk} = \begin{cases} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\phi, \theta) \overline{Y_l^k}(\theta, \phi) \sin(\theta) d\theta d\phi & l = 0, 2, 4, \dots \\ 0 & l = 1, 3, 5, \dots \end{cases}$$

La demostración está detallada en el apéndice (7).

Proposición 3. La varianza del estimador de Q cuando $m_2 = 1$ es:

$$\text{Var}(\hat{Q}(\theta_0, y_0)) = 4\pi \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=-\lfloor \frac{2l}{m_1} \rfloor}^{\lfloor \frac{2l}{m_1} \rfloor} (-1)^{km_1} a_{2l, km_1} a_{2l, -lm_1}.$$

Demostración. Como ya sabemos

$$\text{Var}(\widehat{Q}(\theta_0, y_0)) = E(\widehat{Q}(\theta_0, y_0)^2) - E(\widehat{Q}(\theta_0, y_0))^2 = E(\widehat{Q}(\theta_0, y_0)^2) - Q^2.$$

Para $a_{00} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi F(\phi, \theta) \overline{Y_0^0}(\theta, \phi) \sin(\theta) \, d\theta \, d\phi$ siendo $Y_0^0(\theta, \phi) = C_{00}$ con $P_0^0(\cos(\theta)) = 1$. Además $C_{00} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}}$, entonces

$$a_{00} = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi F(\phi, \theta) \sin(\theta) \, d\theta \, d\phi = \frac{Q}{2\sqrt{\pi}}.$$

Por lo que $Q^2 = a_{00}^2 4\pi$. Cuando $m_2 = 1$ el estimador de Q es de la siguiente forma

$$\widehat{Q}(\theta_0, y_0) = 2T_1 \sum_{i=0}^{m_1-1} F(\theta_i, \arccos(y_0)).$$

Ahora queda calcular la primera parte de la igualdad, recordando que $\cos(\theta) = y$.

$$E(\widehat{Q}(\theta_0, y_0)^2) = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-\lfloor \frac{2l}{m_1} \rfloor}^{\lfloor \frac{2l}{m_1} \rfloor} a_{2l, km_1} \bar{a}_{2l, km_1}.$$

Los cálculos se encuentran en el apéndice (8). Por último, como $a_{00}^2 = a_{00} \bar{a}_{00}$, queda demostrada la proposición. \square

3.3.2. Aproximación de la varianza

Al igual que realizamos una aproximación de la varianza en el círculo, ahora queremos encontrar una aproximación en la esfera ya que no siempre será posible obtener las funciones a_{kl} . Estudiaremos los casos cuando $m_1 > 1$ y $m_2 = 1$. Es decir, para la muestra:

$$\{F(\phi_0, \theta_0), F(\phi_0 + T_1, \theta_0), \dots, F(\phi_0 + (m_1 - 1)T_1, \theta_0)\}.$$

Las funciones a_{2l, km_1} también se pueden escribir de la siguiente manera,

$$a_{2l, km_1} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi F(\phi, \theta) |C_{2l, km_1}| e^{ikm_1 \phi} P_{2l}^{-km_1}(\cos(\theta)) \sin(\theta) \, d\theta \, d\phi,$$

ya que gracias a las propiedades de los armónicos esféricos sabemos que $\overline{Y_{2l}^{km_1}}(\theta, \phi) = (-1)^{km_1} Y_{2l}^{-km_1}(\theta, \phi)$. Si realizamos el cambio de variable $\cos(\theta) = y$ en este caso particular cuando $\theta_0 = \arccos(y_0)$ es un vector aleatorio uniforme fijo. Tenemos una aproximación de los a_{2l, km_1}

$$\tilde{a}_{2l, km_1} = |C_{2l, km_1}| \int_0^{2\pi} F(\phi, \theta_0) e^{ikm_1 \phi} \, d\phi \int_{-1}^1 P_{2l}^{km_1}(y) \, dy.$$

entonces aplicando la proposición 3 (3) aproximaremos la varianza.

$$\widetilde{\text{Var}}(\widehat{Q}(\theta_0, \phi_0)) = 4\pi \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=-\lfloor \frac{2l}{m_1} \rfloor}^{\lfloor \frac{2l}{m_1} \rfloor} (-1)^{km_1} \tilde{a}_{2l, km_1} \tilde{a}_{2l, -km_1} = 4\pi \sum_{l=1}^{\infty} \tilde{a}_{2l, 0} \tilde{a}_{2l, 0} + 8\pi \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{2l}{m_1} \rfloor} (-1)^{km_1} \tilde{a}_{2l, km_1} \tilde{a}_{2l, -km_1}.$$

Donde $\tilde{a}_{2l, 0} \tilde{a}_{2l, 0} = \frac{4l+1}{4\pi} (\int_0^{2\pi} F(\phi, \theta_0) \, d\phi)^2 (\int_{-1}^1 P_{2l}(y) \, dy)^2 = 0$. Ya que la integral del polinomio de Legendre asociado es nula por su ortogonalidad. Entonces

$$\widetilde{\text{Var}}(\widehat{Q}(\phi_0, \theta_0)) = 8\pi \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{2l}{m_1} \rfloor} (-1)^{km_1} \tilde{a}_{2l, km_1} \tilde{a}_{2l, -km_1}. \quad (28)$$

Ahora sustituyendo los valores de $\tilde{a}_{2l,km_1}, \tilde{a}_{2l,-km_1}$.

$$\widetilde{\text{Var}}(\widehat{Q}(\phi_0, \theta_0)) = 2\pi \sum_{l=1}^{\infty} (4l+1) \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{2l}{m_1} \rfloor} (-1)^{km_1} c_{km_1} \int_{-1}^1 P_{2l}^{km_1}(y) dy \int_{-1}^1 P_{2l}^{-km_1}(y) dy.$$

Donde

$$\begin{aligned} \pi c_{km_1} &= \int_0^{2\pi} F(\phi, \theta_0) e^{ikm_1\phi} d\phi \int_0^{2\pi} F(\mu, \theta_0) e^{-ikm_1\mu} d\mu = \\ &= \int_0^{2\pi} F(\phi, \theta_0) (\cos(km_1\phi) + i \sin(km_1\phi)) d\phi \left(\int_0^{2\pi} F(\phi, \theta_0) (\cos(km_1\mu) - i \sin(km_1\mu)) d\mu \right) = \\ &= \left(\int_0^{2\pi} F(\phi, \theta_0) \cos(km_1\phi) d\phi \right)^2 + \left(\int_0^{2\pi} F(\phi, \theta_0) \sin(km_1\phi) d\phi \right)^2. \end{aligned}$$

Entonces si definimos el covariograma de $F(\phi, \theta_0)$ como $g(h) = \int_0^{2\pi} F(\phi, \theta_0) F(\phi+h, \theta_0) d\phi$, tenemos que

$$d_{km_1} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(h) \cos(km_1 h) dh, \quad (29)$$

siendo d_{km_1} un coeficiente muy similar al obtenido en el círculo (1). Entonces podremos conseguir una estimación de la varianza utilizando este valor.

3.3.3. Estimación de la varianza

Desarrollemos una estimación de la varianza para el caso particular $m_1 = 2$ y $m_2 = 1$, con estos valores la muestra es

$$\{F(\phi_0, \theta_0), F(\phi_0 + \pi, \theta_0)\}, \phi_0 \sim \text{UR}[0, \pi),$$

$$\theta_0 = \arccos(y_0), \quad y_0 \sim \text{UR}[-1, 1)$$

simplifiquemos (28), para empezar hay que reescribir la integral de la función de Legendre

$$\int_{-1}^1 P_{2l}^{-2k}(y) dy = \frac{2^{-2k} \pi \Gamma(1+k) \Gamma(1-k)}{\Gamma(l + \frac{3}{2}) \Gamma(1-l) \Gamma(l+k+1) \Gamma(k-l + \frac{1}{2})},$$

Utilizando esta expresión la aproximación de (28) pasa a ser

$$\widetilde{\text{Var}}(\widehat{Q}(\phi_0, \theta_0)) = 8\pi \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(4l+1)(l-1)!^2}{(2l-2)!!^2} \sum_{k=1}^l \frac{(-1)^{km_1} k^2 c_{2k}}{(l+k)!(l-k)!} \prod_{j=1}^l [4k^2 - (2j-1)^2].$$

Donde,

$$\prod_{j=1}^l [4k^2 - (2j-1)^2] = (-1)^{l-k} (2l-2k-1)!! (2l+2k-1)!!.$$

Recordando las identidades $(2n)!! = 2^n n!$ y $(2n+1)!! = (2n+1)!/(2^n n!)$, $n \in \mathbb{N}$, se consigue la expresión

$$\widetilde{\text{Var}}(\widehat{Q}(\phi_0, \theta_0)) = 16\pi \sum_{l=1}^{\infty} \frac{4l+1}{[(l+1)(l+2)]^2} \sum_{k=1}^l \frac{\binom{2l-2k}{l-k} \binom{2l+2k-1}{l+k}}{\binom{2l+1}{l-1}^2} k^2 d_{2k}. \quad (30)$$

El coeficiente d_{2k} se puede obtener mediante (29) modelando el covariograma g con (18).

$$d_{2k,m} = d(m)(g_m(0) - g_m(\pi))(\pi k)^{-(2m+2)},$$

donde

$$d(m) = \frac{(2m+2)!}{2^{2m+1} |2m+2 - \sum_{i=0}^m \binom{2m+2}{2i} 2^{2i} B_{2i}|}.$$

Entonces $d(0) = 1$, $d(1) = 3$, $d(2) = \frac{15}{2}, \dots$ Como realizamos en el círculo podemos estimar $d_{2k,m}$. Sustituyendo g por sus estimaciones en la esfera $C_0 - C_1$.

$$\hat{d}_{2k,m} = d(m) \pi (F(\phi_0, \theta_0) - F(\phi_0 + \pi, \theta_0))^2 (\pi k)^{-(2m+2)}.$$

Si remplazamos $\hat{d}_{2k,m}$ en la estimación de la varianza (30) y denotando a $F(\phi_0 + i\pi, \theta_0)$ como F_i para mayor comodidad. Obtenemos el estimador

$$\widetilde{\text{Var}}(\hat{Q}(\phi_0, \theta_0)) = \frac{16d(m)}{\pi^{2m}} (F_0 - F_1)^2 \sum_{l=1}^{\infty} \frac{4l+1}{[(l+1)(l+2)]^2} \sum_{k=1}^l \frac{\binom{2l-2k}{l-k} \binom{2l+2k-1}{l+k}}{\binom{2l+1}{l-1}^2 k^{2m}}.$$

La doble suma anterior tiende a $\frac{1}{2}$ cuando m tiende a infinito, de hecho el sumatorio converge en $\frac{1}{2}$ cuando m es lo suficientemente grande. Por lo que es correcto sustituir la doble suma por un medio. Se consigue el estimador:

$$\widetilde{\text{Var}}_m(\hat{Q}(\theta_0, \phi_0)) = \frac{8d(m)}{\pi^{2m}} (F_0 - F_1)^2.$$

Como $T_1 = \pi$ y $T_2 = 2$, el estimador de Q es

$$\hat{Q} = 2\pi(F_0 + F_1),$$

entonces el coeficiente de error del estimador es

$$\widehat{\text{CE}}_m((\hat{Q})) = \frac{\sqrt{2d(m)} |F_0 - F_1|}{\pi^{m+1} (F_0 + F_1)}.$$

3.3.4. Estimador en un espacio con kernel reproductor en la esfera

Estamos trabajando en la esfera unidad \mathbb{S}^2 , nos interesa tomar el espacio de Hilbert de funciones \mathcal{H}_1 para construir un kernel reproductor con el cual podremos construir un estimador de la varianza. Según Brauchart y Dick [2013] sabemos que la siguiente función es un reproductor kernel, $K : \mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2 \mapsto \mathbb{R}$:

$$K(x, y) = 1 - \frac{\|x - y\|}{4}. \quad (31)$$

Consideremos el modelo de covariograma $\tilde{g}(x) = aK(x, (0, 0, 1))$, con $a \in \mathbb{R}$. Como se ha visto anteriormente, sabemos que gracias a las propiedades del covariograma el cálculo de la varianza se resume a calcular:

$$\int_{\mathbb{S}^2} g \, dw - \frac{4\pi}{m} \sum_{k=1}^m g(x_k),$$

con el modelo \bar{g} , donde los puntos x_1, \dots, x_N son los vértices de un sólido platónico. Tomando por ejemplo, los vértices de un tetraedro con lado de longitud $\sqrt{8/3}$ cuyas coordenadas son:

$$x_1 = \left(\sqrt{\frac{8}{9}}, 0, -\frac{1}{3} \right), \quad x_2 = \left(-\sqrt{\frac{2}{9}}, \sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{3} \right), \quad x_3 = \left(-\sqrt{\frac{2}{9}}, -\sqrt{\frac{2}{3}}, -\frac{1}{3} \right), \quad x_4 = (0, 0, 1).$$

De acuerdo con [Leobacher y Pillichshammer, 2014, ecuación 3.9] sabemos que

$$\text{Var}(\hat{Q}) = a \langle K, e \rangle, \quad e(x) = \int_{\mathbb{S}^2} K(x, y) \, dw - \frac{4\pi}{m} \sum_{k=1}^m K(x, x_k).$$

Sustituyendo \tilde{g} en $\text{Var}(\widehat{Q}) = a\langle K(x, x_4), e \rangle$, donde este último término se descompone en

$$\begin{aligned} \langle K(x, x_4), \int_{\mathbb{S}^2} K(x, y) \, dw \rangle + \langle K(x, x_4), -\frac{4\pi}{m} \sum_{k=0}^{m-1} K(x, x_k) \rangle = \\ \int_{\mathbb{S}^2} K(x, x_4) \, dw - \frac{4\pi}{m} \sum_{k=1}^m K(x_k, x_4). \end{aligned}$$

Por un lado, en el primer sumando haciendo los cálculos tenemos que

$$\int_{\mathbb{S}^2} K(x, x_4) \, dw = \frac{4\pi}{3}(4 - \sqrt{2}),$$

en el otro término tenemos que la distancia entre dos vértices cualquiera del tetraedro es $\sqrt{8/3}$, por lo tanto $K(x_i, x_j) = 1 - \sqrt{1/6}$ siempre que $i \neq j$. Ahora sustituyendo esto en la fórmula y teniendo en cuenta que $m = 4$,

$$\pi \sum_{k=1}^4 K(x_k, x_4) = \pi(3(1 - \sqrt{1/6}) + 1) = \pi(4 - \sqrt{3/2}).$$

Entonces, juntando todos los resultados

$$\text{Var}(\widehat{Q}) = a \left(\frac{4}{3} - \sqrt{2} + \sqrt{\frac{3}{2}} \right) \pi,$$

y un estimador para a es $4\pi/3 \sum_{i=1}^4 F_i^2$.

4 Estimadores de la longitud de las curvas

En este capítulo estudiaremos las características y las propiedades de las curvas a las que más adelante aproximaremos su longitud. Nos interesa en especial estudiar que ocurre al estimar este tipo de curvas, debido a su simetría. Gracias a [Gomez et al. \[2016\]](#) sabemos que los estimadores de [Cruz-Orive \[1999\]](#) en curvas simétricas funcionan con mayor precisión. Lo que es atrayente para estudiar los estimadores en condiciones óptimas.

4.1. Curvas formadas por sumas finitas de exponenciales

Examinaremos la simetría y también los puntos de intersección de las curvas, para ello nos basaremos en el documento de [Pausinger y Vartziotis \[2018\]](#).

Sea $a = (a_0, a_1, \dots, a_m)$ un vector formado por enteros positivos a_0, \dots, a_m con $m \geq 1$ y sea $\gamma_a : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{C}$ la curva cerrada definida como:

$$\gamma_a(t) = e^{2\pi i a_0 t} + \dots + e^{2\pi i a_m t} = \sum_{j=0}^m e^{2\pi i a_j t}. \quad (32)$$

Es fácil probar que $\gamma_a(t+1) = \sum_{j=0}^m e^{2\pi i a_j t} e^{2\pi i t} = \gamma_a(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, ya que $e^{2\pi i a t}$, con $t \in [0, 1]$ y con $a \in \mathbb{Z}$, es un círculo en el plano complejo. Por lo que γ_a es uno-periódica, entonces se puede reescribir la función como: $\gamma_a : [0, 1] \mapsto \mathbb{C}$, está claro que esta función está definida en un conjunto acotado con soporte finito, es continua y con primera derivada continua, en consecuencia esta función cumple las condiciones necesarias para poder aplicar los estimadores manejados en los capítulos anteriores.

4.1.1. Simetría

Lema 2. Sea $a = (a_0, a_1, \dots, a_m)$ y sea q un entero positivo. Entonces γ_a y γ_{qa} tienen la misma gráfica y $\gamma_a(t) = \gamma_{qa}(t)$.

Demostración. $\gamma_a(qt) = \sum_{j=0}^m e^{2\pi i a_j qt} = \gamma_{qa}(t)$ y es obvio que tienen el mismo grafo. □

Entonces la restricción de γ_{qa} a $[0, \frac{1}{q}]$ da la gráfica de γ_a , y lo mismo hace la restricción a cualquier otro intervalo conexo de longitud $\frac{1}{q}$. De hecho, γ_{qa} cubre q veces la gráfica de γ_a para $t \in [0, 1]$.

Veamos si la gráfica de γ_a es simétrica, para ello utilizaremos la definición de grupo simétrico. Sea $X \in \mathbb{R}^2$ la gráfica de la curva, el grupo de simetría de X consiste en todas las transformaciones que dejan al objeto invariante con la composición de funciones como operador del grupo. Los grupos cíclicos C_n y los grupos diédricos D_n son ejemplos de dos grupos simétricos muy importantes. En particular, el grupo diédrico D_n contiene $2n$ elementos, formado por n simetrías de reflexión y n simetrías rotacionales, que se obtienen a partir de múltiplos del ángulo $\frac{2\pi}{n}$. En el plano complejo estas simetrías se consiguen multiplicando cada punto de X por $e^{\frac{2\pi i j}{n}}$, para $1 \leq j \leq n$.

Teorema 2. Sean a, k, q, m números naturales, donde a y k son coprimos y construyamos el siguiente vector $qb = q(a, k + a, 2k + a, \dots, mk + a)$. Entonces el grupo de simetría de la gráfica de γ_{qb} es el grupo diédrico D_k .

Demostración. Utilizando el lema que acabamos de ver, sabemos que es suficiente con estudiar la gráfica de γ_b .

Comprobemos si D_k es un subgrupo del grupo de simetría de la gráfica de esta curva. D_k es un subgrupo del grupo de simetría si todas las rotaciones sobre un punto fijo, giradas por múltiplos del ángulo $\frac{2\pi}{k}$, dejan la imagen invariante y si encontramos reflexiones en k ejes a través del mismo punto fijo.

Empezaremos por el primer caso, el de las rotaciones. Tenemos que probar que para todos los puntos $x = \gamma_b(t)$, con $t \in [0, 1]$ existe un $t' \in [0, 1]$ tal que $xe^{\frac{2\pi i}{k}} = \gamma_b(t')$. Para mayor comodidad consideremos el caso especial de $a = 1$, es decir $b = (1, k + 1, 2k + 1, \dots, mk + 1)$. Rotemos un punto $\gamma_b(t)$ por $e^{\frac{2\pi i}{k}}$. Es decir,

$$e^{\frac{2\pi i}{k}} \gamma_b(t) = e^{\frac{2\pi i}{k}} \sum_{j=0}^m e^{2\pi i b_j t} = e^{2\pi i(t + \frac{1}{k})} + \sum_{j=1}^m e^{2\pi i(jk+1)(t + \frac{1}{(j+1)k})}.$$

Para probar que la última parte de la igualdad está de nuevo en γ_b es suficiente con encontrar un y tal que $t' = t + \frac{y}{k}$.

$$\begin{aligned} t + \frac{1}{k} &\equiv t + \frac{y}{k} \pmod{1}, \\ (k+1)(t + \frac{1}{k(k+1)}) &\equiv (k+1)(t + \frac{y}{k}) \pmod{1}, \\ &\vdots \\ (mk+1)(t + \frac{1}{k(mk+1)}) &\equiv (mk+1)(t + \frac{y}{k}) \pmod{1}. \end{aligned}$$

Como k y m son números enteros, las equivalencias anteriores se reducen a encontrar solución a estas congruencias.

$$\begin{aligned} 1 &\equiv y \pmod{k}, \\ 1 &\equiv (k+1)y \pmod{k}, \\ &\vdots \\ 1 &\equiv (mk+1)y \pmod{k}. \end{aligned}$$

Obviamente $y = 1$ es una solución a estas congruencias. Entonces para cualquier t podemos encontrar un t' tal que $\gamma_b(t') = e^{\frac{2\pi i}{k}} \gamma_b(t)$. Se puede realizar el mismo procedimiento para un caso general $b = (a, k + a, \dots, mk + a)$ con $a > 1$, pero se tendría que resolver la congruencia $1 \equiv ay \pmod{k}$ y como a y k son coprimos, se sigue que siempre se puede encontrar una solución y además esta será distinta de 1.

Ahora consideremos el caso de las reflexiones, tenemos que probar que para todo $x = \gamma_b(t)$ existe un t'' tal que $\bar{x} = \gamma_b(t'')$, siendo \bar{x} el conjugado complejo de x . Como la función γ_b es 1-periódica podemos tomar t'' como: $t'' = 1 - t$, para ver que los conjugados complejos de los puntos de la curva están también en la curva.

$$\gamma_b(t'') = \sum_{j=0}^m e^{2\pi i b_j t''} = \sum_{j=0}^m e^{2\pi i b_j (1-t)} = \sum_{j=0}^m e^{-2\pi i b_j t} = \gamma_b(-t).$$

Está claro que el conjugado complejo de $x = \gamma_b(t)$ equivale a cambiar el signo a la exponencial, o lo que es lo mismo $\gamma_b(-t)$. Esto muestra que D_k es un subgrupo del grupo de simetría de γ_b .

D_k solo puede ser subgrupo propio de un grupo diédrico de la forma D_{dk} , con $d > 1$. Si D_k es un subgrupo de un grupo D_{dk} , entonces tendría que haber más rotaciones invariantes de las descritas anteriormente.

Esto no es posible ya que, si tomamos el valor absoluto $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ de un número complejo $x + iy = re^{i\theta}$, que denota la distancia Euclídea del punto (x, y) al origen. Dados dos números complejos $z_1 = r_1 e^{i\theta_1}$ y $z_2 = r_2 e^{i\theta_2}$ con $z_1 + z_2 = re^{i\theta}$, gracias a la desigualdad del triángulo sabemos que $r \leq r_1 + r_2$, y solo se daría la igualdad si $\theta_1 = \theta_2 \pmod{2\pi}$. En particular si tomamos los dos primeros valores de b , $(a, a+k)$ como z_1 y z_2 ,

$$e^{2\pi i a t} + e^{2\pi i (a+k)t} = re^{i\theta}, \text{ con } 0 \leq r \leq 2.$$

Para que r sea 2 se tiene que cumplir que $2\pi a t \equiv 2\pi(a+k)t \pmod{2\pi}$, es decir, que $t = \frac{y}{k}$ para cualquier entero y . Entonces, solo hay k puntos con una distancia máxima de 2 al origen, por lo que no puede haber más de k rotaciones invariantes. El grupo de simetría de γ_b tiene que ser D_k .

□

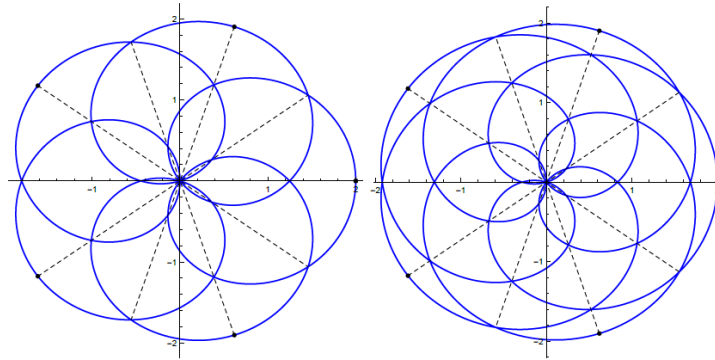


Ilustración 5: Gráfica de las curvas $\gamma_{1,6}$, donde $b_1 = (1, 1+5)$ y $\gamma_{3,8}$, donde $b_2 = (3, 3+5)$ con sus respectivas líneas de reflexión. Los 5 puntos negros son los que están a la distancia máxima de 2 desde el origen.

Como caso particular, si tomamos dos números naturales coprimos a y b con $b > a$ formando el vector $c = (a, b)$. Si $a = 1$, la simetría del grupo de la imagen de γ_c es D_{b-1} . Puesto que $(a, b) = (1, b) = (1, (b-1) + 1)$ y de forma análoga para cualquier a donde el grupo de simetría será D_{b-a} .

4.1.2. Puntos de intersección

Ahora, queremos estudiar las intersecciones $\gamma_{a,b}$ consigo misma cuando a y b son coprimos, como hemos visto antes las curvas son simétricas, por lo que bastará con ver lo que ocurre en el área formado por la recta real y la recta que pasa por el origen originada al rotar un ángulo de $\frac{2\pi}{b-a}$ la recta real. Para empezar demostremos los siguientes lemas:

Lema 3. Sean a y b dos enteros coprimos y $t \in [0, 1]$. Tomemos $\bar{t}_j = \frac{j}{2(a+b)}$, $j = 0, \dots, 2(a+b)$ y $\hat{t}_h = \frac{h}{2(b-a)}$ con $h = 0, \dots, 2(b-a)$. Entonces se tiene que $\text{Im}(\gamma_{a,b}(t)) = 0$ si y solo si $t = \bar{t}_j$ para los j pares o si $t = \hat{t}_h$ para los h impares.

Además $\text{Re}(\gamma_{a,b}(t)) = 0$ si, y solo, si $t = \bar{t}_j$ para los j impares o si $t = \hat{t}_h$ para los h impares. En particular, $\gamma_{a,b}(t) = 0$ si, y solo, si $t = \hat{t}_h$ para los h impares.

Demostración. \Leftarrow) Veamos primero que para un j par la parte imaginaria es nula. Tomemos $j = 2q$,

$$\begin{aligned}\gamma_{a,b}(\bar{t}_j) &= e^{2\pi i a \frac{q}{a+b}} + e^{2\pi i b \frac{q}{a+b}} = e^{2\pi i q(1 - \frac{b}{a+b})} + e^{2\pi i q \frac{b}{a+b}} = \\ &= e^{2\pi i q} e^{-2\pi i q \frac{b}{a+b}} + e^{2\pi i q \frac{b}{a+b}} = \cos(2\pi q) \cos\left(\frac{2\pi q b}{a+b}\right) + \cos\left(\frac{2\pi q b}{a+b}\right) = 2 \cos\left(\frac{2\pi q b}{a+b}\right).\end{aligned}$$

De la misma forma se puede observar que la parte real es cero para los j impares,

$$\begin{aligned}\gamma_{a,b}(\bar{t}_j) &= e^{2\pi i a \frac{(2q+1)}{2(a+b)}} + e^{2\pi i b \frac{(2q+1)}{2(a+b)}} = e^{\pi i (2q+1)(1 - \frac{b}{a+b})} + e^{\pi i (2q+1) \frac{b}{a+b}} = \\ &= e^{2\pi i q} e^{\pi i} e^{-\frac{2\pi i q b}{a+b}} e^{-\frac{\pi i b}{a+b}} + e^{\frac{2\pi i q b}{a+b}} e^{\frac{\pi i b}{a+b}} = -[\cos(2\pi q) \cos\left(\frac{2\pi q b}{a+b}\right)](\cos\left(\frac{\pi}{a+b}\right) - i \sin\left(\frac{\pi b}{a+b}\right)) + \\ &\quad \cos\left(\frac{2\pi q b}{a+b}\right)[\cos\left(\frac{\pi}{a+b}\right) + i \sin\left(\frac{\pi b}{a+b}\right)] = 2i \sin\left(\frac{\pi b}{a+b}\right) \cos\left(\frac{2\pi q b}{a+b}\right).\end{aligned}$$

Se obtienen las otras igualdades de forma análoga con \hat{t}_h . Esto prueba la primera implicación.

\Rightarrow) Supongamos que $\gamma_{a,b}(t) = 0$, esto quiere decir que:

$$\cos(2\pi t a) + \cos(2\pi t b) = 0, \text{ y } \sin(2\pi t a) + \sin(2\pi t b) = 0,$$

solo se cumplen ambas ecuaciones si $2\pi t a + \pi \equiv 2\pi t b \pmod{2\pi}$. Entonces $1 \equiv 2t(b-a) \pmod{2}$ y por lo tanto t tiene que ser $\frac{j}{2(b-a)}$ con j impar.

Si asumimos que $\text{Im}(\gamma_{a,b}(t)) = 0$ y $\text{Re}(\gamma_{a,b}(t)) \neq 0$. Sabemos que

$$\sin(2\pi t a) + \sin(2\pi t b) = 0,$$

haciendo uso de la simetría impar del seno: $\sin(2\pi t a) = -\sin(-2\pi t a)$, se tiene que $-2\pi t a \equiv 2\pi t b \pmod{2\pi}$ entonces $0 \equiv t(a+b) \pmod{1}$ y llegamos a que solo se cumple si $t = \frac{j}{(a+b)}$ con j entero.

Ahora consideremos que $\text{Re}(\gamma_{a,b}(t)) = 0$ y $\text{Im}(\gamma_{a,b}(t)) \neq 0$ entonces:

$$\cos(2\pi t a) + \cos(2\pi t b) = 0.$$

Usando la simetría del coseno: $\cos(\frac{\pi}{2} + \varphi) = -\cos(\frac{\pi}{2} - \varphi)$, se llega a que $\varphi = 2\pi t a - \frac{\pi}{2}$, por lo que $\cos(\frac{\pi}{2} - 2\pi t a + \frac{\pi}{2})$ y entonces $\pi \equiv 2\pi t(a+b) \pmod{2\pi}$ lo que implica que $1 \equiv 2t(a+b) \pmod{2}$ donde $t = \frac{j}{2(a+b)}$ con j impar. \square

Ahora nos interesa centrarnos en los puntos de auto-intersección de la gráfica en la recta real. Gracias a la simetría de la gráfica de $\gamma_{a,b}$ sabemos que hay puntos de auto intersección en cualquier recta que sea una rotación de la recta real con un ángulo $\frac{2\pi j}{b-a}$, con $1 \leq j \leq b-a$.

Lema 4. Sean a, b enteros coprimos y sea $t = \frac{j}{(a+b)}$ y $t' = \frac{j'}{(a+b)}$, con $0 < j, j' < a+b$ y $j \neq j'$. Entonces $\gamma_{a,b}(t) = \gamma_{a,b}(t')$ si y solo si $j + j' = a+b$.

Demostración. \Leftarrow) Si $j + j' = a+b$, entonces $t + t' = 1$ y así $\gamma_{a,b}(t)$ es el conjugado complejo de $\gamma_{a,b}(t')$. Como sus partes imaginarias son nulas, gracias al lema (3) tenemos que $\gamma_{a,b}(t) = \gamma_{a,b}(t')$.

\Rightarrow) Como $\gamma_{a,b}(t) = \gamma_{a,b}(t')$, por el lema (3) sabemos que la parte imaginaria de ambas es nula. Entonces las curvas son:

$$2 \cos\left(\frac{2\pi j b}{a+b}\right) = 2 \cos\left(\frac{2\pi j' b}{a+b}\right).$$

Esta ecuación solo se cumple si $\frac{2\pi j b}{a+b} \equiv \frac{2\pi j' b}{a+b} \pmod{2\pi}$ o si $\frac{2\pi j b}{a+b} + \frac{2\pi j' b}{a+b} \equiv 0 \pmod{2\pi}$. Asumimos que los argumentos son del mismo módulo 2π , entonces en el primer caso:

$$\frac{(j-j')b}{a+b} \equiv 0 \pmod{1}.$$

Donde b y $a + b$ son coprimos desde que a y b lo son y como $0 < j, j' < a + b$ entonces, solo se permite una solución, la trivial $j = j'$. En el segundo caso:

$$\frac{(j + j')b}{a + b} \pmod{1},$$

por las suposiciones realizadas solo existe una posible solución: $j + j' = a + b$. \square

Hasta ahora conocemos todos los puntos de auto-intersección que están en la recta real o en una rotación de esta con cualquier elemento del grupo de simetría. Pero puede que haya más puntos y para hallarlos tomaremos los siguientes intervalos de la curva $\mathcal{I}_j = [t_j, t_j + \frac{2}{b^2 - a^2}]$, con $t_j = \frac{j}{a+b}$, $j \in \mathbb{N}$ y $0 \leq j \leq a + b$.

Lema 5. Sean a, b coprimos con $b - a \geq 4$ y sea $t_j = \frac{j}{a+b}$, con $j \in \mathbb{N}$ y $0 \leq j \leq a + b$. Entonces la función $\gamma_{a,b} : \mathcal{I}_j \mapsto \mathbb{C}$ es inyectiva para $t \in \mathcal{I}_j = [t_j, t_j + \frac{2}{b^2 - a^2}]$.

Demostración. Si escribimos $\gamma_{a,b}$ como $\gamma_{a,b}(t) = (\operatorname{Re}(\gamma_{a,b}(t)), \operatorname{Im}(\gamma_{a,b}(t)))$ consideramos la función γ como una función en \mathbb{R}^2 y sustituyendo t por los puntos $t_j + \frac{x}{b^2 - a^2}$ se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} \gamma_{a,b}(t_j + \frac{x}{b^2 - a^2}) &= e^{2\pi i a \frac{j}{a+b} + 2\pi i a \frac{x}{b^2 - a^2}} + e^{2\pi i b \frac{j}{a+b} + 2\pi i b \frac{x}{b^2 - a^2}} = \\ &= e^{2\pi i j - 2\pi i j \frac{b}{a+b} + 2\pi i x \frac{1}{b-a} - 2\pi i x \frac{b}{b^2 - a^2}} + e^{2\pi i j \frac{b}{a+b} + 2\pi i x \frac{b}{b^2 - a^2}}. \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(\gamma_{a,b}(t_j + \frac{x}{b^2 - a^2})) &= 2 \cos(\pi j + \frac{\pi x}{b-a}) \cos(\pi(a-b) \frac{j(b-a) + x}{b^2 - a^2}), \\ \operatorname{Im}(\gamma_{a,b}(t_j + \frac{x}{b^2 - a^2})) &= 2 \sin(\pi j + \frac{\pi x}{b-a}) \cos(\pi(a-b) \frac{j(b-a) + x}{b^2 - a^2}). \end{aligned}$$

Ahora mostraremos que las restricciones de $\gamma_{a,b}(t)$ a los intervalos $[t_j, t_j + \frac{2}{b^2 - a^2}]$ son inyectivas, supongamos que existen $x, x' \in [0, 2]$ tales que sus imágenes son iguales.

$$\begin{aligned} \gamma_{a,b}(t_j + \frac{x}{b^2 - a^2}) &= \gamma_{a,b}(t_j + \frac{x'}{b^2 - a^2}) \\ 2 \cos(\pi j + \frac{\pi x}{b-a}) \cos(\pi(a-b) \frac{j(b-a) + x}{b^2 - a^2}) &= 2 \cos(\pi j + \frac{\pi x'}{b-a}) \cos(\pi(b-a) \frac{j(a-b) + x'}{b^2 - a^2}) \\ 2i \sin(\pi j + \frac{\pi x}{b-a}) \cos(\pi(a-b) \frac{j(b-a) + x}{b^2 - a^2}) &= 2i \sin(\pi j + \frac{\pi x'}{b-a}) \cos(\pi(a-b) \frac{j(b-a) + x'}{b^2 - a^2}) \end{aligned}$$

Despejando el coseno en la segunda ecuación y sustituyéndolo en la primera

$$\tan(\pi j + \frac{\pi x}{b-a}) = \tan(\pi j + \frac{\pi x'}{b-a}).$$

Se tiene que $-2 \leq x - x' \leq 2$ entonces, cómo la tangente es una función π -periódica los argumentos de la tangente tienen el mismo módulo π .

$$\pi j + \frac{\pi x}{b-a} \equiv \pi j + \frac{\pi x'}{b-a} \pmod{\pi}, \text{ y esto equivale a que } \frac{x - x'}{b-a} \equiv 0 \pmod{1}.$$

Como $b - a \geq 4$ y $-2 \leq x - x' \leq 2$ estas restricciones solo admiten la solución $x = x'$, por lo que acabamos de probar que la función es inyectiva. \square

Además, podemos añadir que en los intervalos en los que la curva es inyectiva, también es convexa.

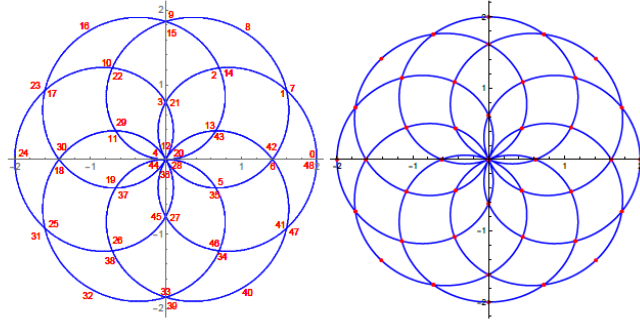


Ilustración 6: Curva de $\gamma_{1,7}$, los enteros son los numeradores de $\frac{j}{48}$ que son los puntos de intersección. La curva de la derecha es $\gamma_{1,9}$ con los puntos $t = \frac{j}{80}$.

Lema 6. *Dados dos coprimos enteros a, b y $t_j = \frac{j}{a+b}$, la curva $\gamma_{a,b} : \mathcal{I}_j \mapsto \mathbb{C}$ es convexa para $t \in \mathcal{I}_j = [t_j, t_j + \frac{2}{b^2-a^2}]$.*

Demostración. Una curva simple, regular y plana es convexa, si y solo, si su curvatura es siempre positiva o siempre negativa. Podemos calcular la curvatura $\kappa_{a,b}(t)$ de la curva parametrizada

$$(x(t), y(t)) = (\operatorname{Re}(\gamma_{a,b}(t)), \operatorname{Im}(\gamma_{a,b}(t))).$$

Con,

$$\kappa_{a,b}(t) = \frac{x'(t)y''(t) - y'(t)x''(t)}{(x'(t)^2 + y'(t)^2)^{3/2}} = \frac{a^3 + b^3 + ab(a+b)\cos(2\pi(a-b)t)}{(a^2 + b^2 + 2ab\cos(2\pi(a-b)t))^{3/2}} > 0,$$

como $-1 \leq \cos(x) \leq 1$ para todo x y $a^3 + b^3 - ab(a+b) = (a-b)^2(a+b)$ y $a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2$, la curvatura siempre será positiva. \square

Una vez vistos todos estos lemas, podemos demostrar el siguiente teorema, que estudia el caso especial $a = (1, k+1)$, $k \geq 4$.

Teorema 3. *Sea $k \geq 4$ un entero y $a = (1, k+1)$. Si $\gamma_a(t) \neq 0$ y $\gamma_a(t) = \gamma_a(t')$ con $t, t' \in [0, 1]$ y $t \neq t'$ entonces existen enteros $0 \leq j, j' \leq k(k+2)$ tales que $t = \frac{j}{k(k+2)}$ y $t' = \frac{j'}{k(k+2)}$.*

Demostración. Definiremos $\gamma := \gamma_{1,k+1}$ para mayor comodidad. Aplicando el teorema (2), sabemos que la gráfica de γ tiene el grupo de simetría D_k , gracias al lema (3) como $t_j = \frac{j}{k+2}$, con $j \in \mathbb{N}$ entonces

$$\operatorname{Im}(\gamma(t_j)) = 0 \text{ y } \gamma(t_j) = 2 \cos(2\pi \frac{j(k+1)}{k+2}).$$

Ahora observemos que $j(k+1) \equiv -j \pmod{k+2}$, es decir, al incrementar j con $0 \leq j \leq \lfloor \frac{k+2}{2} \rfloor$ se obtiene una secuencia descendente de argumentos igualmente separados por el coseno. Si aplicamos la simetría del coseno:

$$2 \cos(0) > 2 \cos(\frac{2\pi(-1)}{k+2}) = 2 \cos(\frac{2\pi}{k+2}) > 2 \cos(\frac{2\pi(-2)}{k+2}) = 2 \cos(\frac{4\pi}{k+2}) > \dots > 2 \cos(\pi).$$

Esto se puede escribir en función de $\gamma(t)$ ya que la parte imaginaria es 0.

$$\gamma(0) > \gamma(\frac{1}{k+2}) > \gamma(\frac{2}{k+2}) > \dots > \gamma(\lfloor \frac{k+2}{2} \rfloor \frac{1}{k+2}).$$

Rotar un número complejo al rededor del origen no altera su distancia al origen, además gracias al teorema (2), sabemos que $e^{\frac{2\pi i}{k}} \gamma(t) = \gamma(t + \frac{1}{k})$. Todos los puntos $\gamma(\frac{\pm j}{k+2})$ que están en la recta real, tienen un punto correspondiente $\gamma(\frac{\pm j}{k+2} + \frac{1}{k})$ en la recta $re^{\frac{2\pi i}{k}}$.

$$t_j + \frac{1}{k} = \frac{j}{k+2} + \frac{1}{k} = \frac{(j+1)k+2}{k(k+2)} = t_{j+1} + \frac{2}{k(k+2)}, \quad (33)$$

y también

$$t_{-j} + \frac{1}{k} = \frac{-j}{k+2} + \frac{1}{k} = \frac{(-j+1)k+2}{k(k+2)} = t_{-j+1} + \frac{2}{k(k+2)}. \quad (34)$$

Observamos que si $\gamma(\frac{j}{k+2}) = \gamma(\frac{-j}{k+2})$, entonces $\gamma(\frac{(j+1)k+2}{k(k+2)}) = \gamma(\frac{(-j+1)k+2}{k(k+2)})$.

Sabemos por el lema (5) que γ es inyectiva y convexa para cualquier $t \in \mathcal{I}_j = [t_j, t_j + \frac{2}{k(k+2)}]$. También se aprecia que γ envía todos los puntos $t_j + \frac{2}{k(k+2)} = \frac{j}{k+2} + \frac{2}{k(k+2)}$ a la recta rotacional, mientras que a los puntos $t_j = \frac{j}{k+2}$ los envía a la recta real. Desde que t_j son los únicos valores t para los cuales $\gamma(t)$ está en la recta real y son distintos de cero, concluimos que todas las partes de γ que están en el área formado por una recta y su rotación se pueden obtener restringiendo $t \in [0, 1]$ al intervalo \mathcal{I}_j .

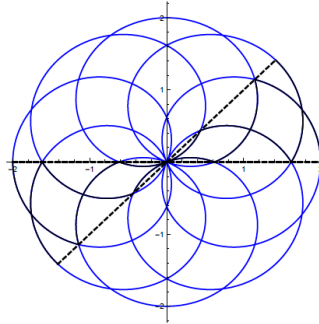


Ilustración 7: Curva de $\gamma_{1,9}$, la parte negra es la restricción de t a los intervalos \mathcal{I}_j .

En particular, si dos puntos $t_j = \frac{j}{k+2}$ tienen la misma imagen en la recta real, la imagen correspondiente de los puntos $t_j + \frac{2}{k(k+2)}$ son distintas en la recta rotada y viceversa. Estudiando las ecuaciones (33) y (34) se sigue que si se rota $\gamma(t_j)$ o respectivamente $\gamma(t_{-j})$ la función te devuelve la imagen de los puntos del extremo derecho de \mathcal{I}_{j+1} o \mathcal{I}_{-j+1} respectivamente. Además las imágenes rotadas de $\gamma(t_{j-1})$ y $\gamma(t_{-j-1})$ te devuelven exactamente la imagen de los puntos del extremo derecho de \mathcal{I}_j y \mathcal{I}_{-j} respectivamente. Entonces por convexidad de la curva, vemos que la curva tiene exactamente k intersecciones en el interior del área formada por las dos rectas. \square

Este teorema también se puede aplicar a un caso general $c = (a, b)$ en este supuesto todos los puntos de auto intersección serían de la forma $\frac{j}{b^2 - a^2}$ para $0 \leq j \leq b^2 - a^2$. Pero esta demostración es más técnica y laboriosa. En el caso general la clase de congruencia sería $jb \equiv -aj \pmod{a+b}$, pero para que sea más sencillo hemos tomado el caso particular $(1, k+1)$ con clase de congruencia $j(k+1) \equiv -j \pmod{k+2}$.

4.2. Estimación de la longitud y de la varianza

El objetivo es estimar la longitud de las siguientes 8 curvas:

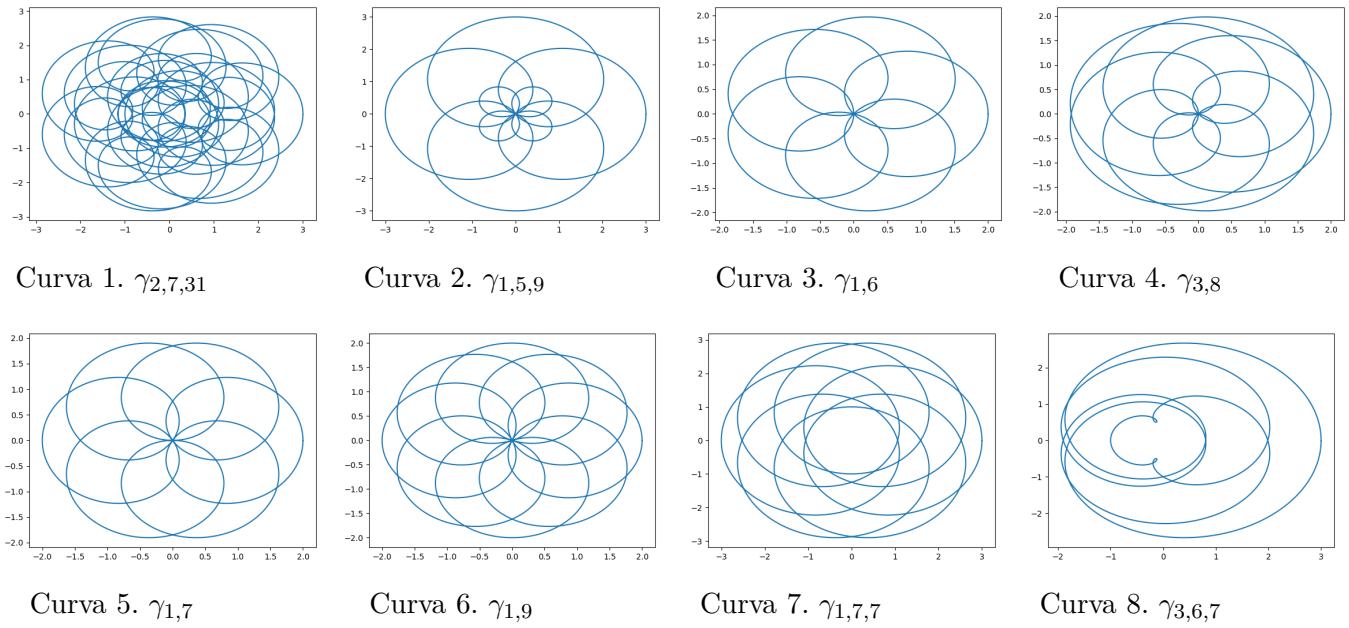


Ilustración 8: Gráficas de las curvas con sus respectivas ecuaciones.

Donde γ_a es la ecuación de cada curva definida en (32). Primero calcularemos su longitud real para luego poder estudiar el error cometido y la precisión de los estimadores. Para poder calcular la longitud de una curva γ_a en el plano complejo primero hay que parametrizarla. Estas curvas están definidas por:

$$\gamma_a : [0, 1] \mapsto \mathbb{C} \quad \text{con } a = (a_1, \dots, a_m), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Se deduce directamente de la definición de γ_a que estas curvas están parametrizadas por:

$$(x(t), y(t)) = \left(\sum_{i=0}^m (\cos(2\pi a_i t)), \sum_{i=0}^m (\sin(2\pi a_i t)) \right).$$

La longitud de una curva parametrizada en el intervalo $[0, 1]$ es:

$$L(\gamma) = \int_0^1 \sqrt{|x'(t)^2 + y'(t)^2|} \, dt. \quad (35)$$

Entonces si realizamos los cálculos correspondientes, por ejemplo, con la primera curva

$$\begin{aligned} x'(t) &= -4\pi \sin(4\pi t) - 14\pi \sin(14\pi t) - 62\pi \sin(62\pi t) \\ y'(t) &= 4\pi \cos(4\pi t) + 14\pi \cos(14\pi t) + 62\pi \cos(62\pi t). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L_1(\gamma) &= \\ &= \int_0^1 \sqrt{4\pi^2(2 \cos(4\pi t) + 7 \cos(14\pi t) + 31 \cos(62\pi t))^2 + 4\pi^2(2 \sin(4\pi t) + 7 \sin(14\pi t) + 31 \sin(62\pi t))^2} \, dt = \\ &= 197,47. \end{aligned}$$

Se hallaron las longitudes de las curvas a partir del código que se ha añadido al apéndice (9), se utilizó el programa Sagemath. Se obtuvieron los siguientes resultados:

Curva	Longitud	Error
1	197.47	15×10^{-5}
2	60.93	1.76×10^{-5}
3	37.96	1.96×10^{-7}
4	52.05	5.73×10^{-9}
5	44.21	4.09×10^{-6}
6	56.72	6.30×10^{-13}
7	88.08	1.74×10^{-8}
8	54.64	1.24×10^{-9}

Cuadro 1: Longitud real de cada curva con su error de aproximación de la integral.

4.2.1. Método de Buffon-Steinhaus

Para mostrar la eficacia de este estimador será suficiente con realizar las estimación con un par de curvas, ya que todas cumplen las mismas características de simetría y no aportarían mucha novedad. Desarrollaremos el estimador de Buffon-Steinhaus basado en el conteo de puntos e intersecciones. Tomemos una curva X con longitud L y sea $l(\theta)$ la longitud de su proyección ortogonal que forma un ángulo θ con un eje fijo. Usando la fórmula de la proyección de Cauchy:

$$L = \int_0^\pi f(\theta) \, d\theta, \quad \text{donde } f(\theta) = \frac{1}{2}l(\theta).$$

La función es π -periódica, entonces tomaremos el período constante $T = \frac{\pi}{m}$ siendo m el tamaño de la muestra y nos interesa considerar el caso finito $r = 1$.

Para estimar L necesitaremos al menos dos observaciones sistemáticas, es decir, $m = 2$ por lo que nuestro ángulo constante T será $\frac{\pi}{2}$. Un estimador insesgado de L con una muestra sistemática de dos elementos es:

$$\hat{L}(\theta) = T \sum_{k=0}^{M-1} f(\theta_0 + kT) = \frac{\pi}{2}(f_0 + f_1), \quad \text{con } f_0 = f(\theta_0), \quad f_1 = f(\theta_0 + \frac{\pi}{2}) \text{ y } \theta_0 \sim \text{UR}[0, \frac{\pi}{2}).$$

Como no conocemos el valor de los f_i los tendremos que estimar, utilizaremos la información recogida en Cruz-Orive [1999], Cruz-Orive y Gual-Arnau [2002] y Gomez et al. [2016]. Sea $\hat{f}(\theta)$ una estimación de $f(\theta)$, entonces

$$\hat{f}(\theta) = f(\theta) + e(\theta),$$

donde $e(\theta)$ representa el error local asociado a $f(\theta)$, o como ya mencionamos el «error nugget». Cumple las siguientes propiedades:

1. $E(e(\theta)) = 0$
2. $\text{Var}(e(\theta)) = \sigma^2(\theta)$

Ahora podemos expresar nuestro parámetro de interés como

$$L = \int_0^{2\pi} E(\hat{f}(\theta)) \, d\theta.$$

Entonces un estimador insesgado según el método de Cavalieri es:

$$\tilde{L}(\theta) = T \sum_{k=0}^{m-1} \hat{f}(\theta_0 + kT).$$

Cuya muestra sistemática es $\{\hat{f}(\theta_0), \hat{f}(\theta_0 + \frac{\pi}{2})\} = \{\hat{f}_0, \hat{f}_1\}$, donde θ_0 es un vector aleatorio uniforme en $[0, \frac{\pi}{2})$. Esta muestra está formada por dos observaciones perpendiculares entre ellas, es decir, la rejilla cuadrada en la que se contarán las intersecciones.

Además $\sigma_i^2 = \sigma^2(\theta_0 + iT)$, $i = 0, 1$ es el error local de la varianza asociado a \hat{f}_i , es decir, $\sigma_i^2 = \text{Var}(\hat{f}_i | f_i)$. Para obtener las estimaciones \hat{f} necesitaremos encontrar un estimador insesgado de f . Supongamos que los segmentos consecutivos de cada \hat{f}_i están separados por una distancia fija H , entonces la estimación de f será:

$$\hat{f}_i = \frac{H}{2} \sum_{j=1}^{r_i} I_{ij}, \quad i = 0, 1,$$

Donde I_{ij} es el número de intersecciones de la curva X con la « j »-línea del test en el ángulo « i » y r_i el número de segmentos de la muestra sistemática que tocan a la curva X en el ángulo i . Por lo que obtenemos el estimador insesgado de f que estábamos buscando.

$$\hat{f}_i(\theta) = \frac{H}{2} I_i(\theta), \quad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}), \quad (36)$$

donde $I(\theta)$ representa el número total de intersecciones de la curva X con la muestra sistemática en el ángulo θ . Sustituyendo en el estimador \tilde{L} :

$$\tilde{L} = \frac{\pi H}{2} (I_0(\theta) + I_1(\theta)) = \frac{\pi}{4} H I, \quad \theta \in [0, \frac{\pi}{2}). \quad (37)$$

Siendo I el número de intersecciones totales de la muestra sistemática y I_1 e I_2 el número de intersecciones del primer conjunto de segmentos «test» de la muestra y del segundo respectivamente.

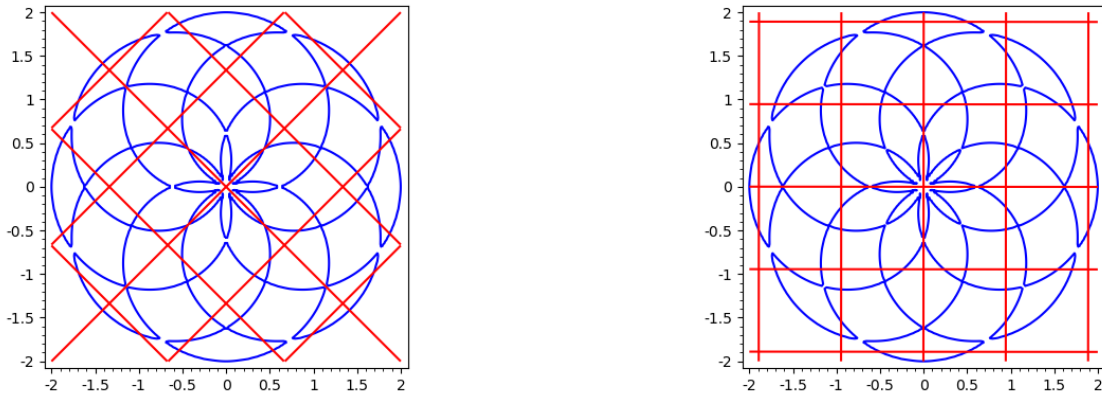


Ilustración 9: Gráfica de la curva $\gamma_{1,6}$. A la izquierda con una sonda formada por una muestra sistemática de dos elementos con punto inicial $(0,0)$ y ángulo inicial $\frac{\pi}{4}$, $\{f_0 = f(\frac{\pi}{4}), f_1 = f(\frac{3\pi}{4})\}$ y a la derecha con punto inicial $(0,0)$ y ángulo $\frac{\pi}{2}$. Ambas con una distancia $H = \frac{L}{60}$ entre cada segmento consecutivo.

Ejemplo

En este ejemplo calcularemos la varianza exacta de un estimador del círculo y comprobaremos el resultado con la varianza del estimador (37).

Tomando la curva $\gamma_{1,1} = 2e^{2\pi it}$ que corresponde con el círculo de radio $r = 2$, cuya ecuación en polares es: $x = r \cos(\theta)$, $y = r \sin(\theta)$. La longitud de la curva está definida por $L = \int_0^\pi 2r \, d\theta = 2\pi r = 4\pi$. Para obtener el valor exacto de la varianza desarrollemos su expresión en series de Fourier con $L = \pi$.

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi f(t) \, dt = \frac{L}{\pi} = 4, \quad a_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \cos(kt) \, dt = 0, \quad b_k = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \sin(kt) \, dt = 0 \quad \forall k \in \mathbb{N}.$$

Entonces $s_f(t) = a_0 = 4$. Gracias a la proposición (17) sabemos que la varianza es 0. Además esto es trivial debido a que la función de medida es $f(\theta) = 4$.

Se deduce directamente que el covariograma de esta función es $g(h) = \int_0^\pi f(\theta)f(\theta+h) \, d\theta = 16\pi$.

Por otro lado, $T \sum_{k=0}^{m-1} g(kT) = \frac{\pi}{m} \sum_{k=0}^{m-1} 16\pi = 16\pi^2$. Entonces por la definición de varianza:

$$\text{Var}(\hat{L}_m(\theta)) = T \sum_{k=0}^{m-1} g(kT) - \int_0^\pi g(h) \, dh = 0 \quad \forall m \in \mathbb{N}.$$

Calculemos la varianza utilizando las estimaciones de $f(\theta)$ vistas en (36). Tomando un espacio H de $\frac{1}{2}$ entre los «test lines», con el vértice de la rejilla en el punto $(0,0)$ y un ángulo aleatorio entre $[0, T)$. Se obtuvieron un total de 32 intersecciones, de donde 16 fueron de los segmentos de f_0 y las otras 16 de f_1 . Entonces sus estimaciones son:

$$\tilde{L} = \frac{IH\pi}{4} = 4\pi, \quad \hat{f}_0 = \frac{HI_0}{2} = 4 \text{ y } \hat{f}_1 = \frac{HI_1}{2} = 4.$$

Sustituyendo en la función covariograma directamente estas estimaciones

$$g(h) = \int_0^\pi \hat{f}(\theta)\hat{f}(\theta+h) \, d\theta = \int_0^\pi 16 \, d\theta = 16\pi,$$

por otro lado,

$$T \sum_{i=0}^{m-1} g(iT) = \frac{\pi}{2}(g(0) + g(\frac{\pi}{2})) = \frac{\pi}{2}(\int_0^\pi \hat{f}(\theta)^2 \, d\theta + \int_0^\pi \hat{f}(\theta)\hat{f}(\theta + \frac{\pi}{2}) \, d\theta) = \frac{\pi}{2}(32\pi) = 16\pi^2.$$

Entonces la varianza

$$\text{Var}(\tilde{L}_2(\theta)) = T \sum_{k=0}^{m-1} g(kT) - \int_0^\pi g(h) \, dh = 16\pi^2 - \int_0^\pi 16 \, dh\pi = 0.$$

Conjunto de muestras

Para realizar las estimaciones nos interesa construir un conjunto sistemático de $S = k^2 = 10^2$ diferentes muestras sistemáticas (Gomez et al. [2016]), donde a cada muestra le corresponde un número de intersecciones con la curva. Es decir, para cada elemento del conjunto de muestras se contará el número total de intersecciones de los segmentos que forman \hat{f}_0 y también las intersecciones de los segmentos perpendiculares \hat{f}_1 .

Para crear este conjunto necesitamos elegir los puntos iniciales de la muestra y el ángulo de rotación de una manera aleatoria e independiente para asegurarnos que el estimador sea insesgado en cada muestra. Supongamos que (x_0, y_0) es el punto inicial aleatorio entonces en ese punto se superpondrá un vértice de la rejilla. Elegiremos dos valores aleatorios e independientes, $x_0, y_0 \in [0, 1)$. Los demás puntos iniciales (x_i, y_j) del resto de muestras serán originados de forma sistemática dentro del intervalo $[0, H) \times [0, H)$, es decir:

$$\begin{aligned} x_i &= (x_0 + i - 1)H/k, \\ y_j &= (y_0 + j - 1)H/k, \\ \{(x_i, y_j), \quad i, j &= 1, 2, \dots, k\} = \{(c_t), \quad t = 1, \dots, S\}. \end{aligned} \tag{38}$$

Después se generan S ángulos de forma sistemática en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2})$:

$$\{(U_0 + i - 1)\frac{\pi}{2S}, \quad i = 1, \dots, S\},$$

con U_0 un número aleatorio en el intervalo $[0, 1)$ e independiente de x_0 y y_0 . Por último estos ángulos se «barajan» de forma aleatoria para emparejar a cada punto (c_t) con uno de estos ángulos, así se consigue un conjunto sistemático de 100 puntos iniciales de la rejilla con sus respectivos ángulos de rotación, $A = \{(c_i, \theta_i), i = 1, \dots, S\}$. A partir de cada elemento del conjunto A se crea una muestra sistemática.

Después tenemos el conjunto B con el total de intersecciones, $B = \{I(i), i = 1, \dots, S\}$, donde $I(i)$ es el número de intersecciones de la curva con la « i »-muestra sistemática del conjunto A . El código que dibuja las curvas con las muestras y devuelve las intersecciones está añadido en el apéndice (10,11).

4.2.2. Estimador de la varianza método Buffon-Steinhaus

Desarrollemos la ecuación de la varianza de \hat{L} y el estimador de la varianza. Gracias a la estimación de la varianza en el semicírculo que obtuvimos en (26) y sustituyendo con los parámetros que hemos tomado $r = 1$ y $m = 2$. Se obtiene:

$$\widehat{\text{Var}}_1(\hat{L}_2) = \frac{\pi^2(C_0 - C_1)}{60} = \frac{\pi^2(f_0 - f_1)^2}{60}. \quad (39)$$

Por comodidad denotaremos a $\text{Var}_1(\hat{L}_2) := \text{Var}(\hat{L})$. Pero lo que queremos estimar es la varianza de \tilde{L} ya que está escrito en función de las intersecciones que son los valores que conocemos. La varianza de \tilde{L} es:

$$\text{Var}(\tilde{L}) = \text{Var}(\hat{L}) + T \int_0^r \sigma^2 dx.$$

El primer término lo podemos estimar utilizando (39) y devuelve el error de la rotación de la rejilla, pero en la segunda parte de la ecuación desconocemos el error local σ . Entonces, tendremos que utilizar la función covariograma para poder estimar estos valores.

$$\text{Var}(\tilde{L}) = \text{Var}(\hat{L}) + T(E(g(0; \hat{f})) - g(0; f)). \quad (40)$$

Donde $E(g(0; \hat{f}))$ representa el valor esperado del covariograma evaluando \hat{f} en el 0. El término de la derecha de (40) se estima a partir de $T^2 v$, donde $v = \sum_{k=0}^{m-1} \sigma_i^2$. Entonces como ya hemos mencionado al no poder calcular directamente el error, tendremos que estimar los σ_i para obtener la estimación de $T^2 \hat{v}$. Los parámetros $\hat{\sigma}_i^2$ calculan el error local formado por las rectas que forman la rejilla por lo que habrá que utilizar el estimador de la varianza en \mathbb{R} (9):

$$\hat{v} = \sum_{k=0}^{n-1} \hat{\sigma}_i^2, \quad \text{donde} \quad \hat{\sigma}_i^2 = \frac{H^2}{12}(3C_{0i} - 4C_{1i} + C_{2i}), \quad i = 0, 1.$$

Sustituyendo en cada $C_{ij} = \sum_{i=1}^n f_i f_{j+i}$, las aproximaciones \hat{f}_i de las funciones f_i conseguimos la expresión en base al número de intersecciones.

$$Z_{ij} = \sum_{j=1}^{r_1-l} I_{i,j} I_{i,j+l}, \quad l = 0, 1, 2, \quad i = 0, 1. \quad (41)$$

El primer término de (40) lo hemos calculado con f_i entonces hay que sustituir estos valores por sus estimaciones, la estimación será igual que (39) pero quitándole el error local \hat{v} , ya que esta estimación no es exacta

$$\widehat{\text{Var}}(\hat{L}) = \frac{\pi^2(\hat{f}_0 - \hat{f}_1)^2 - \hat{v}}{60}.$$

Entonces juntando las dos partes tenemos la estimación de la varianza.

$$\widehat{\text{Var}}(\tilde{L}) = \widehat{\text{Var}}(\hat{L}) + T^2\hat{v} = \frac{\pi^2(\hat{f}_0 - \hat{f}_1)^2 - \hat{v}}{60} + \frac{\pi^2\hat{v}}{4}.$$

En resumen las fórmulas que necesitamos para obtener la estimación de la varianza son:

$$\begin{aligned}\widehat{\text{Var}}(\tilde{L}) &= \frac{\pi^2}{60}((\hat{f}_0 - \hat{f}_1)^2 - \hat{v}) + \frac{\pi^2}{4}\hat{v}, \\ \hat{v} &= \hat{\sigma}_0^2 + \hat{\sigma}_1^2, \\ \hat{\sigma}_i^2 &= \frac{(H/2)^2}{12}(3Z_{0i} - 4Z_{1i} + Z_{2i}), \quad i = 0, 1, \\ Z_{ij} &= \sum_{j=1}^{r_1-l} I_{i,j}I_{i,j+l}, \quad l = 0, 1, 2, \quad i = 0, 1.\end{aligned}$$

Donde la segunda parte de la ecuación estima el error cometido por las «test lines» gracias al muestreo sistemático en \mathbb{R} y el primer término estima el error debido a la orientación de la rejilla debido al muestreo sistemático en el semicírculo.

Procedimiento

Veamos el procedimiento seguido para obtener las estimaciones de cada curva. Tomando, por ejemplo, las curvas 7 y 8 con un espacio entre los segmentos de $H = \frac{L}{60}$. Antes de empezar recordemos que sus longitudes reales son $L_7 = 88,076$ y $L_8 = 54,6392$ (35). La estimación de la longitud de las curvas se obtiene con (37). Dado el conjunto B con las intersecciones totales de cada muestra, que se obtuvo gracias al código (11), podemos hallar la media de las intersecciones $E(I) = \sum_{i=1}^S \frac{I(i)}{S} = 76$. Con la cual se tiene la media de la estimación de la longitud:

$$E(\tilde{L}) = \frac{\pi H E(I)}{4} = 54,36.$$

Se aprecia que este valor es muy próximo al real, por lo que los resultados que estamos recibiendo son correctos debido a que el estimador es insesgado.

Se puede calcular la varianza real a partir de elementos del conjunto B .

$$\text{Var}(\tilde{L}) = \frac{1}{S} \sum_{i=1}^S (\tilde{L}_i - E(\tilde{L}))^2 = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} \left(\frac{\pi H I_i}{4} - E(\tilde{L}) \right)^2 = 2,49.$$

Calculemos la estimación de la varianza. Se explicará en detalle como se obtiene la estimación de la varianza para una muestra sistemática en concreto. Eligiendo un elemento del conjunto A , se obtuvieron las siguientes intersecciones. Para $\hat{f}_0 = [4, 8, 10, 10, 4, 2]$ (el segmento «horizontal» de arriba hacia abajo) y $\hat{f}_1 = [4, 8, 10, 10, 6, 2]$ (el segmento «vertical» de izquierda a derecha). Con $r_0 = 6$ y $r_1 = 6$.

Como $\hat{f}_i = \frac{H}{2} \sum_{j=1}^{r_i} I_{ij}$, entonces $\hat{f}_0 = \frac{H}{2} \sum_{i=0}^6 I_{i0} = 17,30$ y $\hat{f}_1 = \frac{H}{2} \sum_{i=0}^6 I_{i1} = 18,21$.

Calculemos los Z_{ij} correspondientes:

$$\begin{aligned}Z_{00} &= \sum_{j=0}^6 I_{0j}^2 = 300 \text{ y } Z_{10} = \sum_{j=0}^6 I_{1j}^2 = 320, \\ Z_{01} &= \sum_{j=0}^5 I_{0j}I_{0j+1} = 260 \text{ y } Z_{11} = \sum_{i=0}^5 I_{1j}I_{1j+1} = 284, \\ Z_{02} &= \sum_{i=0}^4 I_{0j}I_{0j+2} = 180 \text{ y } Z_{12} = \sum_{i=0}^4 I_{1j}I_{1j+2} = 200.\end{aligned}$$

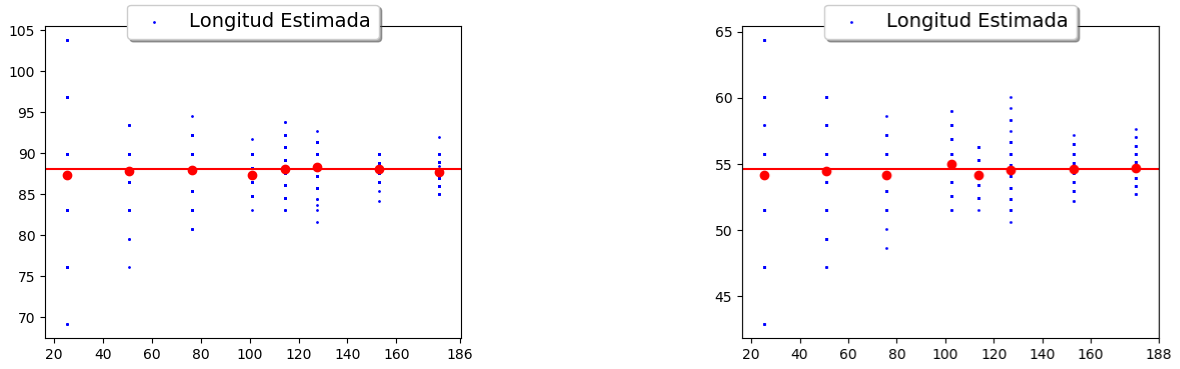


Ilustración 10: Esta figura representa las estimaciones de la longitud de las curvas 7 y 8 respectivamente. Muestra los resultados obtenidos con diferentes tamaños de rejilla H ($L/20$, $L/40$, $L/60$, $L/80$, $L/90$, $L/100$, $L/120$ y $L/140$ siendo L la longitud de cada curva). Para cada H se han realizado 100 estimaciones. Los puntos azules representan las estimaciones, los puntos rojos la media de las estimaciones para cada H y la línea roja es la longitud real. Cómo se puede apreciar cuánto más pequeño el espacio entre líneas más precisa es la estimación (Código en el apéndice (13)).

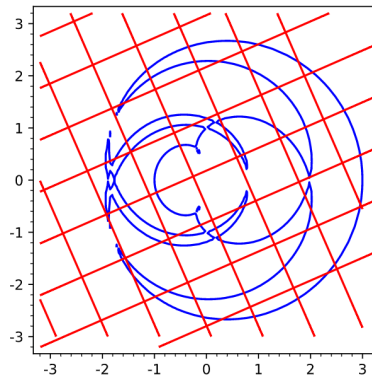


Ilustración 11: Curva $\gamma_{3,6,7}$ con una rejilla girada por un ángulo aleatorio entre $[0, \frac{2}{\pi})$ y superpuesta en un vértice aleatorio entre $[0, H) \times [0, H)$.

Entonces para calcular v quedaría:

$$\begin{aligned}\sigma_1^2 &= \frac{(H/2)^2}{12}(3Z_{00} - 4Z_{10} + Z_{20}) = 0,69, \\ \sigma_2^2 &= \frac{(H/2)^2}{12}(3Z_{01} - 4Z_{11} + Z_{21}) = 0,41, \\ v &= \sigma_1^2 + \sigma_2^2 = 1,10.\end{aligned}$$

Tendríamos que la estimación de la varianza es

$$\widehat{\text{Var}}(\widehat{L}) = \frac{\pi^2}{60}((\hat{f}_0 - \hat{f}_1)^2 - \hat{v}) + \frac{\pi^2 \hat{v}}{4} = 2,68.$$

Obtenemos una estimación de la varianza de 2,68 cuando la varianza real nos salió 2,49. Esta estimación es muy próxima, pero ha sido un ejemplo de un caso concreto de una muestra aleatoria. En total conseguimos para cada H un vector de 100 estimaciones de la varianza que corresponden a las estimaciones de cada elemento de A , se puede consultar el código en (12). En la siguiente gráfica podemos

ver como varía la varianza para distintos tamaños de la rejilla, donde se representa el coeficiente de error de las estimaciones de la varianza.

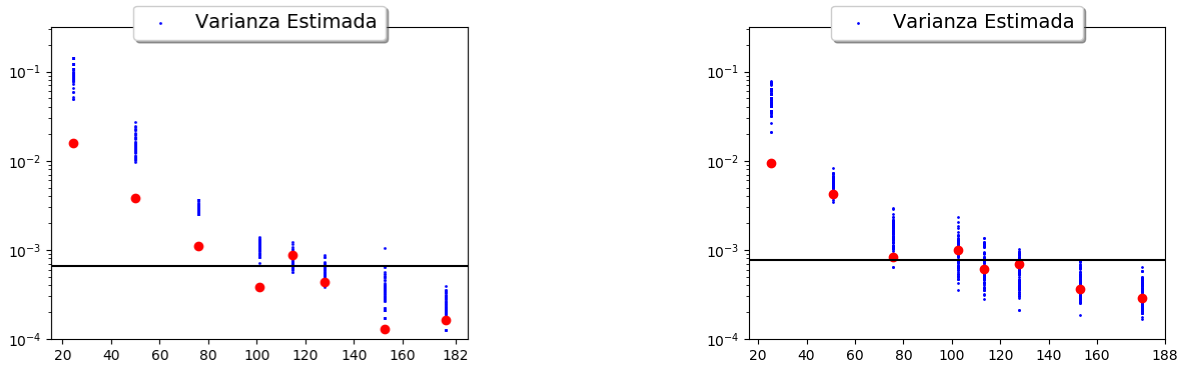


Ilustración 12: Coeficientes de error de las estimación de la varianza para las curvas 7 y 8 respectivamente. Se utilizaron distintos tamaños de rejilla ($L/20$, $L/40$, $L/60$, $L/80$, $L/90$, $L/100$, $L/120$ y $L/140$ siendo L la longitud de cada curva) y para cada H se realizaron 100 estimaciones de la varianza, donde los puntos azules representan sus coeficientes de error. Los puntos rojos representan el coeficiente de error de la varianza real. La línea negra representa la media de los coeficientes de error de las varianzas reales. (Código en el anexo 14).

4.2.3. Método de estimación del error Quasi-Monte Carlo

En la sección anterior hemos estimado la longitud de las curvas formadas por sumas finitas de exponenciales. Como ya hemos introducido anteriormente, estamos interesados en estimar la varianza de estas aproximaciones mediante la teoría del error del método de Quasi-Monte Carlo en un espacio con reproductor Kernel.

Esta teoría está desarrollada a partir de funciones definidas en el intervalo $[0, 1)$, por lo que tenemos que normalizar las curvas para que estén definidas en el mismo intervalo. Se han ajustado todas las curvas al espacio $[0, 1) \times [0, 1)$ modificando el código en el que se dibujaban las curvas y las sondas o rejillas (15).

Utilizaremos los estimadores de la varianza obtenidos a lo largo de este trabajo, en espacios de Hilbert con reproductor Kernel. En el método de Buffon construimos el estimador a partir del error formado por la orientación de la rejilla y el error originado por los segmentos de la rejilla. En este caso hay que realizar lo mismo. Está claro que para obtener el error formado por la orientación de la rejilla utilizaremos el estimador (24), que tal y como hemos probado es equivalente al estimador (26). En definitiva, para estimar el error de la rotación se usará la misma ecuación que se empleó en el método de Buffon:

$$\frac{\pi^2}{60}((f_0 - f_1)^2 - \hat{v}),$$

donde $\hat{v} = T^2 \sum_{i=0}^{m-1} \hat{\sigma}_i$, siendo cada σ_i el error de «nugget» de los elementos que forman la muestra.

Para obtener el error en \mathbb{R} utilizaremos la ecuación (13), donde se necesitarán al menos dos elementos para formar la muestra sistemática ($m = 2$):

$$\hat{\sigma}_i^2 = 2H \left(\frac{3C_{0i}^2(2-H)}{C_{1i}} + 2C_{0i}(H-6) + \frac{3C_{1i}(4-H)}{(2-H)} \right).$$

Este estimador calcula el error de los « test lines » de la rejilla con σ_i , $i = 0, 1$. Como los valores de C_{ji} son desconocidos tendremos que utilizar las estimaciones Z_{ji} de C_{ji} (41) que están definidas en función del número de intersecciones de cada elemento de la muestra. Que se obtuvieron con Sagemath con el código (16) que es análogo al código (11) pero adaptado a las curvas con la gráfica acotada en $[0, 1) \times [0, 1)$. En resumen:

$$\widehat{\text{Var}}(\tilde{L}) = \frac{\pi^2}{60}((\hat{f}_0 - \hat{f}_1)^2 - \hat{v}) + \frac{\pi^2}{4}\hat{v} \quad (42)$$

$$\hat{v} = \hat{\sigma}_0^2 + \hat{\sigma}_1^2, \quad (43)$$

$$\hat{\sigma}_i^2 = 2H \left(\frac{3Z_{0i}^2(2-H)}{Z_{1i}} + 2Z_{0i}(H-6) + \frac{3Z_{1i}(4-H)}{(2-H)} \right). \quad (44)$$

Después se realiza el mismo proceso que realizamos con el método de Buffon; se forma un conjunto sistemático de puntos y ángulos, independientes entre sí y aleatorios, igual que se ha hecho anteriormente.

$$A' = \{(c'_i, \theta'_i), i = 1, \dots, S\}.$$

Los resultados de las fórmulas se pueden ver en la ilustración 13 gracias al código 17.

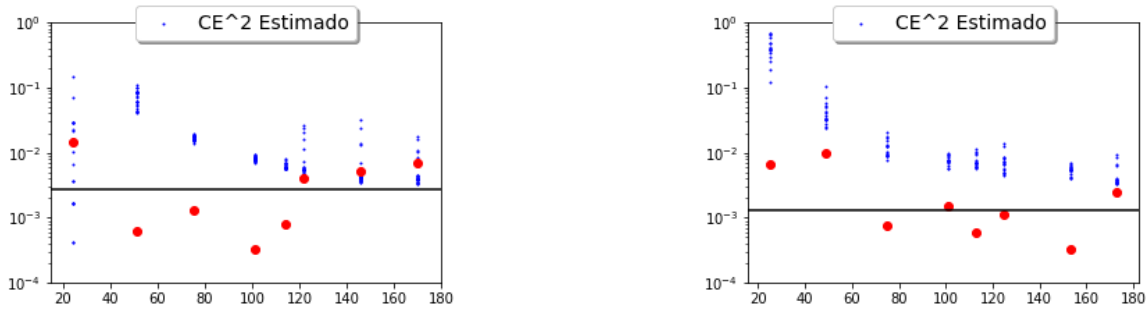


Ilustración 13: Coeficientes de error de la estimación de la varianza para las curvas 7 y 8 respectivamente con 42. Se utilizaron distintos tamaños de rejilla ($L/20$, $L/40$, $L/60$, $L/80$, $L/90$, $L/100$, $L/120$ y $L/140$ siendo L la longitud de cada curva) con 100 estimaciones de la varianza se obtuvieron sus respectivos coeficientes de error (azules). Los puntos rojos representan los coeficientes de error de la varianza real. La línea negra representa la media de los coeficientes de error de las varianzas reales. Las gráficas se han obtenido con el mismo código (14).

5 Conclusiones

A lo largo de este trabajo hemos introducido el concepto de estereología, como se obtienen estimadores, como es su precisión, es decir, cuanto error cometen y por último, como aproximar ese error mediante estimadores de la varianza. Se han estudiado algunos de los métodos más importantes de la estereología y se han realizado varios ejemplos donde se puede apreciar su utilidad.

Por otro lado, se ha introducido el método Quasi-Monte Carlo y se ha determinado que es un espacio de Hilbert con kernel reproductor, puesto que en estos espacios es donde se pueden desarrollar más propiedades del error del método. Al igual que se realizó con técnicas del campo de la estereología, hemos construido estimadores de la varianza.

Estas dos formas de aproximar el error cometido al estimar el área, la longitud o el volumen, al principio parecían que no tenían nada en común, pero se puede apreciar como siempre se ha conseguido un estimador de la varianza a partir de cada método en todos los cuerpos que hemos trabajado: en el círculo, semicírculo, esfera y en \mathbb{R} . Incluso, en algunos casos este estimador ha resultado ser el mismo.

Después se han elegido unas curvas simétricas, ya que como hemos explicado este tipo de curvas son óptimas para la estimación y resulta especialmente interesante estudiar los estimadores en condiciones favorables. En particular, se ha estimado la longitud de las curvas 7 y 8, utilizando el método de Buffon-Steinhaus. Se han realizado 100 estimaciones para 100 muestras sistemáticas diferentes variando el tamaño de la rejilla. En este apartado se ha visto como aumenta la precisión de la estimación cuanto menos espacio hay entre las rectas que forman la sonda (Ilustración 10).

Después se ha construido un estimador de la varianza basándonos en el método de Cavalieri y Buffon, donde también se han realizado 100 estimaciones de la varianza para diferentes tamaños de la sonda. (Ilustración 12). Se obtuvieron las mismas conclusiones: para menor tamaño, más intersecciones entonces se obtiene más precisión del estimador y menor error.

Por último se construyó el estimador de la varianza para evaluar el estimador de la longitud de las curvas, a partir del método QMC, se vio que el comportamiento del estimador es ligeramente peor para las dos curvas elegidas (Ilustración 13). Esto puede ser debido a que el estimador hace menos suposiciones sobre las propiedades de las curvas o también a que la función que hemos utilizado para modelar el covariograma tiene dos variables mientras que la que hemos empleado en (9) tiene 3.

Como hemos mencionado, para poder aplicar la teoría del método QMC es necesario que las funciones de medida del parámetro de interés se encuentren en \mathcal{H}_1 , es decir, que sea continua y con primera derivada integrable, pero en los estimadores basados en la estereología era necesario además que la primera derivada fuese continua. En conclusión, los métodos de estereología son casos particulares del método QMC. Esto es debido a que sabemos que en este supuesto siempre se va a poder encontrar un Kernel, con el cual obtener el estimador de la varianza y se podrá modelar el covariograma g con la función que consideremos más apropiada, pudiendo ser la misma que se ha utilizado en el método de Cavalieri y Buffon.

Queda como problema interesante estudiar cual de los dos métodos desarrollados en la esfera es más eficaz y también que ocurre cuando se quiere estimar una estructura geométrica que no tiene unas propiedades tan favorables como las curvas que hemos considerado en este trabajo.

A Apéndice

1. La Identidad de Parseval es una generalización del teorema de Pitágoras aplicado a los espacios de Hilbert separables. Si B es una base ortonormal en un espacio vectorial con producto interno de dimensión finita n , entonces

$$||x||^2 = \langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^n |\langle v_i, x \rangle|^2$$

Para las series de Fourier con periodo H ,

$$\frac{1}{H} \int_0^H f^2(z) \, dz = \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2).$$

2. La función Gamma: $\Gamma(m) = \int_0^{\infty} y^{m-1} e^{-y} \, dy$. Cumple las siguientes propiedades:

$$\Gamma(2n+1) = 2n\Gamma(2n),$$

$$\Gamma(n+1) = n!,$$

$$\Gamma(1) = 1.$$

3. Los números de Bernoulli se pueden calculara través de esta formula recursiva

$$B_m = \frac{-1}{m+1} \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m+1}{k} B_k.$$

Se pueden expresar en valores de la función zeta de Riemann.

$$B_{2k}(0) = \frac{2(-1)^{k+1}\Gamma(2k+1)}{2\pi^{2k}} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}}$$

4. Cálculos del ejemplo del capítulo de estimación en \mathbb{R} .

$$\begin{aligned} \int_{-Hm}^{Hm} E(g(h)) \, dh &= 2 \left(Hm(\sigma^2 + \mu^2) \int_0^H dh - (m\sigma^2 + \mu^2) \int_0^H h \, dh + \right. \\ &\quad \left. Hm\mu^2 \int_H^{mH} dh - \mu^2 \int_H^{mH} h \, dh \right) = 2 \left(H^2 m \sigma^2 + H^2 m \mu^2 - \frac{m \sigma^2 H^2}{2} - \frac{H^2 \mu^2}{2} + \mu^2 m^2 H^2 \right. \\ &\quad \left. - m \mu^2 H^2 - \frac{\mu^2 m^2 H^2}{2} + \frac{\mu^2 T^2}{2} \right) = H^2 m \sigma^2 + (Hm\mu)^2 = \text{Var}(H(x_1 + \dots + x_m)) + E(H(x_1 + \dots + x_m))^2. \end{aligned}$$

$$\text{Var}(\widehat{Q}(z)) = Hg(0) + 2H \sum_{k=1}^m g(kH) - (E(\widehat{Q}(z)))^2.$$

$$\begin{aligned} Hg(0) + 2H \sum_{k=1}^m g(kH) &= H^2m(\sigma^2 + \mu^2) + 2H \sum_{k=1}^m (Hm - Hkm)\sigma^2 + 2H \sum_{k=1}^m (Hm - Hk)\mu^2 \\ &= H^2m(\sigma^2 + \mu^2) + 2H^2m^2\sigma^2 - 2H \sum_{k=1}^m Hmk\sigma^2 + 2H^2m^2\mu^2 - 2H \sum_{k=1}^m kH\mu^2 = \\ &= H^2m(\sigma^2 + \mu^2) + 2H^2m^2\sigma^2 - 2H^2m^2\sigma^2 + 2H^2m^2\mu^2 - 2H^2m^2\mu^2 = H^2m(\sigma^2 + \mu^2) \end{aligned}$$

Entonces,

$$\text{Var}(\widehat{Q}(z)) = Hg(0) + 2H \sum_{k=1}^m g(kH) - (E(\widehat{Q}(z)))^2 = H^2m\sigma^2.$$

5. Los cálculos del desarrollo en series de Fourier del ejemplo del cardioide en el círculo.

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (1 - a \cos(\theta))^2 \cos(k\theta) \, d\theta = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(k\theta) \, d\theta - \frac{2a}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\theta) \cos(k\theta) \, d\theta + \frac{a^2}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\theta)^2 \cos(k\theta) \, d\theta. \end{aligned}$$

Estudiemos los dos primeros términos:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(k\theta) \, d\theta - \frac{2a}{\pi} \int_0^{2\pi} (\cos((k+1)\theta) + \cos((k-1)\theta)) \, d\theta &= \\ = \frac{1}{\pi} \left[\frac{\sin(k\theta)}{k} \right]_{\theta=0}^{2\pi} - \frac{a}{\pi} \left(\left[\frac{\sin((k+1)\theta)}{k+1} \right]_{\theta=0}^{2\pi} + \left[\frac{\sin((k-1)\theta)}{k-1} \right]_{\theta=0}^{2\pi} \right) &= 0, \text{ para todo } k > 1. \end{aligned}$$

Cuando $k = 1$ entonces,

$$-\frac{2a}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\theta)^2 \, d\theta = -\frac{2a}{\pi} \left[\frac{1}{2}(\theta + \sin(\theta) \cos(\theta)) \right]_{\theta=0}^{2\pi} = -2a.$$

Ahora calculemos la integral restante:

$$\frac{a^2}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\theta)^2 \cos(k\theta) \, d\theta = \frac{a^2}{\pi} \frac{(k^2 - 2) \sin(2\pi k)}{k(k^2 - 4)} = 0, \quad \forall k \neq 2.$$

Queda por ver que ocurre cuando $k=2$,

$$\frac{a^2}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\theta)^2 \cos(2\theta) \, d\theta = \left[\frac{a^2}{16\pi} (4\theta + 4 \sin(2\theta) + \sin(4\theta)) \right]_{\theta=0}^{2\pi} = \frac{a^2}{2}.$$

Por último los coeficientes b_k :

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} (1 - a \cos(\theta))^2 \sin(k\theta) \, d\theta = \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin(k\theta) \, d\theta - \frac{2a}{\pi} \int_0^{2\pi} \sin((k+1)\theta) + \sin((k-1)\theta) \, d\theta + \frac{a^2}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\theta)^2 \sin(k\theta) \, d\theta = \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{\cos(k\theta)}{k} \right]_{\theta=0}^{2\pi} - \frac{2a}{\pi} \left(\left[\frac{\cos((k+1)\theta)}{k+1} \right]_{\theta=0}^{2\pi} + \left[\frac{\cos((k-1)\theta)}{k-1} \right]_{\theta=0}^{2\pi} \right) - \frac{k \sin(4\pi k)}{4(k-1)^2} = 0, \quad \forall k > 1. \end{aligned}$$

En el caso de que $k = 1$ se tiene que,

$$-\frac{2a}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos(\theta) \sin(\theta) \, d\theta + \frac{a^2}{\pi} \int_0^{2\pi} \cos^2(\theta) \sin(\theta) \, d\theta = \frac{a^2}{\pi} \left[\frac{-\cos(\theta)^3}{3} \right]_{\theta=0}^{2\pi} - \frac{2a}{\pi} \left[\sin^2(\theta) \right]_{\theta=0}^{2\pi} = 0.$$

6. *Demostración.* $g_m(2\pi - x) = \sum_{i=0}^{m+1} \beta_{2i}(x-2\pi)^{2i} + \beta_{2m+1}(x-2\pi)^{2m+1} = \sum_{i=0}^{m+1} \beta_{2i}x^{2i} + \beta_{2m+1}x^{2m+1} = g_m(x)$, si llamamos a $\alpha_{2i} = 2\pi^{2i}\beta_{2i}$ y a $y = \frac{x}{2\pi}$,

$$\sum_{i=0}^{m+1} \beta_{2i}(x-2\pi)^{2i} - \beta_{2i}x^{2i} = \beta_{2m+1}(x-2\pi)^{2m+1} + \beta_{2m+1}x^{2m+1},$$

$$\sum_{i=0}^{m+1} \alpha_{2i}((y-1)^{2i} - y^{2i}) = \alpha_{2m+1}((y-1)^{2m+1} + y^{2m+1}).$$

1. En el término de la izquierda donde el i -ésimo valor, desarrollando el binomio obtenemos su expresión:

$$\alpha_{2i} \left[\sum_{j=0}^{2i} \binom{2i}{j} (-1)^{2i-j} y^j - y^{2i} \right] = \alpha_{2i} \sum_{j=0}^{2i-1} \binom{2i}{j} (-y)^j,$$

entonces se puede obtener la siguiente identidad

$$\sum_{i=1}^{m+1} \alpha_{2i}((y-1)^{2i} - y^{2i}) = \sum_{j=1}^{m+1} \sum_{i=j}^{m+1} \alpha_{2i} \left[\binom{2i}{2j-2} y^{2j-2} - \binom{2i}{2j-1} y^{2j-1} \right].$$

También se puede escribir de la misma manera el lado derecho de la igualdad anterior:

$$\alpha_{2m+1}((y-1)^{2m+1} + y^{2m+1}) = -\alpha_{2i}^{m+1} \sum_{j=1}^{m+1} \binom{2m+1}{2j-2} y^{2j-2} - \sum_{j=1}^{m+1} \binom{2m+1}{2j-1} y^{2j-1} - y^{2m+1},$$

igualando el coeficiente de y^{2m+1} con el de la ecuación que acabamos de probar tenemos que:

$$\alpha_{2m+1} = -(m+1)\alpha_{2m+2} \equiv \beta_{2m+1} = -2\pi(m+1)\beta_{2m+2}.$$

2. Si igualamos los coeficientes de y^{2j-2} para $j = 1, \dots, m$ y utilizando la primera propiedad demostrada, obtenemos la siguiente ecuación.

$$\sum_{i=j}^m \binom{2i}{2j-2} \alpha_{2i} = [(m+1) \binom{2m+1}{2j-2} - \binom{2m+2}{2j-2}] \alpha_{2m+2},$$

si ahora se igualan los coeficientes de y^{2j-1} ,

$$\sum_{i=j}^m \binom{2i}{2j-1} \alpha_{2i} = [m \binom{2m+1}{2j-1} - \binom{2m+1}{2j-2}] \alpha_{2m+2}, j = 1, \dots, m.$$

La solución del sistema es:

$$\alpha_{2i} = \binom{2m+2}{2i} B_{2(m-i+1)} \alpha_{2m+2}, \quad \text{con } i = 1, 2, \dots, m.$$

$$2\pi^{2i} \beta_{2i} = \binom{2m+2}{2i} B_{2(m-i+1)} \beta_{2m+2} 2\pi^{2m+2}, \quad \beta_{2i} = \beta(i; m) \beta_{2m+2}.$$

□

7.

$$a_{lk} = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\phi, \theta) \overline{Y_l^k}(\phi, \theta) \sin(\theta) d\theta d\phi + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\phi + \pi, \pi - \theta) \overline{Y_l^k}(\phi + \pi, \pi - \theta) \sin(\theta) d\theta d\phi =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\phi, \theta) \overline{Y_l^k}(\phi, \theta) \sin(\theta) d\theta d\phi + [(-1)^l \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\phi, \theta) \overline{Y_l^k}(\phi, \theta) \sin(\theta) d\theta d\phi].$$

8.

$$\begin{aligned}
E[\widehat{Q}(\theta_0, y_0)^2] &= E[(2T_1 \sum_{i=0}^{n_1-1} F(\phi_i, \arccos(y)))^2] = 4T_1^2 \sum_{i=0}^{n_1-1} \int_0^{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{(F(\phi_i, \arccos(y)))^2 dy d\theta}{2T_1} = \\
&= 2T_1 \sum_{i=0}^{n_1-1} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} F(\phi, \theta) F(\phi + iT_1, \theta) \sin(\theta) d\phi d\theta.
\end{aligned}$$

Como F es real entonces su conjugado es él mismo :

$$F(\phi, \theta) = \overline{F(\phi, \theta)} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l \overline{a_{lk}} \overline{Y_l^k}(\theta, \phi).$$

Por otro lado: $F(\phi + jT_1, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l a_{kl} Y_l^k(\theta, \phi + jT_1)$ y como $Y_k^l(\theta, \phi + jT_1) = C_{lk} e^{ik(\phi + jT_1)} P_l^k \cos(\theta) = Y_k^l(\theta, \phi) e^{ikjT_1}$, se tiene que:

$$F(\phi + jT_1, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l a_{kl} Y_l^k(\theta, \phi) e^{ikjT_1}.$$

Por la primera propiedad de los armónicos esféricos:

$$\begin{aligned}
E[\widehat{Q}(\theta_0, y_0)^2] &= 2T_1 \sum_{j=0}^{n_1-1} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l a_{kl} \overline{a_{lk}} \overline{Y_l^k}(\theta, \phi) Y_l^k(\theta, \phi) e^{ikjT_1} \sin(\theta) d\phi d\theta = \\
&= 2T_1 \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l a_{kl} \overline{a_{lk}} \sum_{j=0}^{n_1-1} e^{\frac{2\pi i k j}{n_1}} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-l}^l a_{l,k} \overline{a_{l,k}} \sum_{j=0}^{n_1-1} \frac{\cos(\frac{2\pi k j}{n_1})}{n_1} = 4\pi \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{k=-[\frac{2l}{n_1}]}^{[\frac{2l}{n_1}]} a_{2l, kn_1} \overline{a_{2l, kn_1}}.
\end{aligned}$$

9. — Código para calcular la longitud —

```

1  t = SR.var('t')
2  def longitud_real(A):
3      fx1=0
4      fx2=0
5      for a in A:
6          fx1 += cos(2*pi*t*a)
7          fx2 += sin(2*pi*t*a)
8      dx1 = Derivative(fx1, t).doit()
9      dx2=Derivative(fx2, t).doit()
10     return numerical_integral(sqrt((dx1)^2+(dx2)^2), 0, 1, max_points=100)

```

10. Código para dibujar la curva y rejilla

```

1  R.<x,y> = PolynomialRing(QQ,"x,y")
2  def seno_coseno(n):
3      """Esta función calcula el polinomio en x,y de seno(nt),cos(nt)"""
4      global x,y
5      temp_cos = x # temp_cos es una variable que guarda cos(rx). Se inicializa r=1
6      temp_seno = y # temp_seno guarda sen(rx). Se inicializa r=1
7      for r in range(1,n):
8          #Se actualiza temp_cos y temp_seno para que guarden cos(rx) y sen(rx)
9          temp_cos,temp_seno = temp_cos*x- temp_seno*y, temp_seno*x + y* temp_cos
10     return temp_seno,temp_cos
11
12 def gamma(a):
13     """
14     Esta función recibe el vector a y devuelve el
15     polinomio X,Y que cumplen los puntos de la curva.
16     """
17     R1.<X,Y,x,y> = PolynomialRing(QQ,"X,Y,x,y")
18     coordenada_X,coordenada_Y = 0,0
19     for n in a:
20         temp_seno, temp_cos = seno_coseno(n)
21         coordenada_X += temp_cos
22         coordenada_Y += temp_seno
23     I0 = Ideal([x**2+y**2-1,X-R1(coordenada_X),Y-R1(coordenada_Y)]).
24     elimination_ideal((x,y))
25     return I0.groebner_basis()[0]
26 #la función te devuelve la gráfica de la curva y la rejilla
27 def dibuja(A,theta,T,c):
28     #Pasar c al intervalo [0,T] en ambas dimensiones
29     var("Var_a,Var_b")
30     R = RealField(1000); R
31     c[0]=c[0]%T
32     c[1]=c[1]%T
33     theta=R(theta)%(R(pi)/2)
34     if theta<0.17:
35         theta+=pi/2
36     R1.<X,Y,x,y> = PolynomialRing(R,"X,Y,x,y")
37     cota = len(A)
38     f = gamma(A)
39     r = R1(f).subs(X=Var_a,Y=Var_b)
40     dibujo = implicit_plot(r,(Var_a,-cota,cota),(Var_b,-cota,cota))
41     #La rejilla sería de la forma x=tan(theta)*y + jT/cos(theta)
42     j=-2*cota
43     if T<0.5:
44         j=-cota*1/T
45     while (j*T*cos(theta)<cota and j*T*sin(theta)<cota):
46         dibujo +=implicit_plot((1/tan(theta))*(Var_b-c[1])-(Var_a-c[0])+
47             j*T*(sin(theta)**-1),(Var_a,-cota,cota),(Var_b,-cota,cota),color="red")
48         dibujo +=implicit_plot((1/tan(theta+pi/2))*(Var_b-c[1])-(Var_a-c[0])+
49             j*T*(sin(theta+pi/2)**-1),(Var_a,-cota,cota),(Var_b,-cota,cota), color="red")
50         j=j+1
51     return dibujo

```

11. – Código intersecciones –

```

1  #La función te devuelve las intersecciones totales de la rejilla con la curva,
2  #las intersecciones de la primera muestra y de la segunda
3  def dibuja_curva(A,theta,T,c):
4      R = RealField(1000); R
5      c[0]=c[0]%T
6      c[1]=c[1]%T
7      theta=R(theta)%(R(pi)/2)
8      if theta<0.17:
9          theta+=pi/2
10     InterseccionesV=[]
11     InterseccionesH=[]
12     R1.<X,Y,x,y> = PolynomialRing(R,"X,Y,x,y")
13     cota = len(A)
14     f = gamma(A)
15     j=-2*cota
16     if T<0.5:
17         j=-cota*1/T
18     while (j*T*cos(theta)<cota and j*T*sin(theta)<cota):
19         f1=R1(f).subs(X=(1/tan(theta))*(Y-c[1])+c[0]+(j*T)*(sin(theta)**-1))
20         R1.<Y> = PolynomialRing(R,"Y")
21         f1=R1(f1)
22         f1 = f1.quo_rem(f1.gcd(f1.diff()))[0]
23         R1.<X,Y,x,y> = PolynomialRing(R,"X,Y,x,y")
24         InterseccionesV.append(pari(f1).polsturm(-cota,cota))
25         f2=R1(f).subs(X=(1/tan(theta+pi/2))*(Y-c[1])+c[0]+(j*T)*(sin(theta+pi/2)**-1))
26         R1.<Y> = PolynomialRing(R,"Y")
27         f2=R1(f2)
28         f2 = f2.quo_rem(f2.gcd(f2.diff()))[0]
29         R1.<X,Y,x,y> = PolynomialRing(R,"X,Y,x,y")
30         InterseccionesH.append(pari(f2).polsturm(-cota,cota))
31         j=j+1
32     Total=sum(InterseccionesV)+sum(InterseccionesH)
33     return Total,InterseccionesV,InterseccionesH
34 #La función te devuelve un vector con las 100 intersecciones de las 100
35 #"rejillas" diferentes con la curva
36 def Intersecciones(A,T,numruns=100):
37     Lista_Inter=[]
38     puntos=[]
39     k=(numruns)**(1/2)
40     #Puntos sistemáticos
41     c1=random.uniform(0,1)
42     c2=random.uniform(0,1)
43     c3=random.uniform(0,1)
44     for i in range(1,numruns+1):
45         puntos.append((c3+i-1)*(pi/(2*numruns)))
46     random.shuffle(puntos)
47     for i in range(1,k+1):
48         for j in range(1,k+1):
49             s=dibuja_curva(A,puntos[i],T,[(c1+i-1)*(T/k),(c2+j-1)*(T/k)])
50             Lista_Inter.append(s[0])
51     return(Lista_Inter)

```

12. — Código estimación de la varianza —

```

1  #Esta función devuelve la varianza real
2  def varianza(Lista_Inter,T):
3      L_meds=[]
4      var=[]
5      for i in range(0,len(Lista_Inter)):
6          L_meds.append((math.pi/4)*T*Lista_Inter[i])
7      var=np.var(L_meds)
8      return(var)
9  #Esta función devuelve los Z_ij
10 def autocorr(x):
11     y=np.squeeze(np.array(x))
12     result=np.correlate(y,y,mode='full')
13     return result[len(result)//2:]
14 #Estimacion de la varianza
15 def estimacion_varianza(A,T,numruns=100):
16     Lista_var=[]
17     puntos=[]
18     k=(numruns)**(1/2)
19     c1=random.uniform(0,1)
20     c2=random.uniform(0,1)
21     c3=random.uniform(0,1)
22     Int=[]
23     for i in range(0,numruns):
24         puntos.append((c3+i-1)*(pi/(2*numruns)))
25     random.shuffle(puntos)
26     for i in range(0,k):
27         for j in range(0,k):
28             s=(dibuja_curva(A,puntos[i],T,[(c1+i-1)*(T/k),(c2+j-1)*(T/k)]))
29             a=s[1]
30             b=s[2]
31             Int.append(s[0])
32             f0=(sum(a)*T)/2
33             f1=(sum(b)*T)/2
34             sigma1=((T^2)*(3*autocorr((a))[0]-4*autocorr((a))[1]+autocorr((a))[2]))/48
35             sigma2=((T^2)*(3*autocorr((b))[0]-4*autocorr((b))[1]+autocorr((b))[2]))/48
36             v=sigma1+sigma2
37             est_var=((math.pi^2)*(((f0-f1)^2)-v))/60
38             est_var2=(math.pi^2*v)/4
39             L_est=(math.pi/2)*(f0+f1)
40             Lista_var.append(est_var+est_var2)
41
42     return(Lista_var,Int)
43

```

13. — Código gráfica estimación de la longitud —

```

1
2 #plot de la estimación de la longitud para diferentes h
3 def plot_estimacion_longitud(Listas_Inters,L,T, num_runs=100):
4     E=[]
5     L_medias=[]
6     for i in Listas_Inters:
7         E.append(sum(i)/len(i))
8     for i in range(0,len(T)):
9         L_medias.append(E[i]*(math.pi/4)*T[i])
10    L_med=[]
11    for j in range(0,len(T)):
12        for i in range(0,num_runs):
13            L_med.append((math.pi/4)*T[j]*Listas_Inters[j][i])
14    left, width = 0.1, 0.65
15    bottom, height = 0.1, 0.65
16    rect_scatter = [left, bottom, width, height]
17    axScatter = plt.axes(rect_scatter)
18    ax = plt.gca()
19    axScatter.scatter([[i]*num_runs for i in E[0]],L_med[0:num_runs],
20    color="blue",s=1,label="Longitud Estimada")
21    for j in range(1,len(E)):
22        axScatter.scatter([[i]*num_runs for i in E[j]],
23        ,
24        L_med[(num_runs)*j:(j+1)*(num_runs)], color="blue",s=1)
25    for i in range(0,len(T)):
26        axScatter.scatter(E[i],L_medias[i], color="r")
27    axScatter.axhline(L,color='r')
28    handles, labels = ax.get_legend_handles_labels()
29    for i in range(0,len(E)):
30        plt.xticks([30,40,50,60,70,80,90,int(max(Listas_Inters[i]))], ["30","40","50",
31        "60","70","80","90",str(int(max(Listas_Inters[i])))])
32    lgd = ax.legend(loc='upper center', bbox_to_anchor=(0.5, 1.10),
33        ncol=3, fancybox=True, shadow=True,fontsize=14)
34    ax.set_ylim( (L-10,L+10))
35    plt.show()

```

14. — Código gráfica estimación de la varianza —

```

1  def plot_estimacion_varianza(Lista_var,L,T,Listas_Inters,num_runs=100):
2      var=[]
3      for j in range(0,len(T)):
4          var.append(varianza(Listas_Inters[j],T[j]))
5      E=[]
6      for i in Listas_Inters:
7          E.append(sum(i)/len(i))
8      media_var=[]
9      for i in range(0,len(T)):
10         media_var.append(np.median(Lista_var[i]))
11
12     left, width = 0.1, 0.65
13     bottom, height = 0.1, 0.65
14     rect_scatter = [left, bottom, width, height]
15     axScatter = plt.axes(rect_scatter)
16     ax = plt.gca()
17     axScatter.scatter( [[i]*num_runs for i in E[0]],Lista_var[0:num_runs], color="blue",
18                        s=1,label="Varianza Estimada")
19     for j in range(1,len(T)):
20         axScatter.scatter( [[i]*num_runs for i in E[j]],
21                            ,Lista_var[(num_runs)*j:(j+1)*num_runs], color="blue",s=1)
22     for i in range(0,len(T)):
23         axScatter.scatter(E[i],var[i]/L^2, color="r")
24     handles, labels = ax.get_legend_handles_labels()
25     for i in range(0,len(E)):
26         plt.xticks([30,40,50,60,70,80,90,int(max(Listas_Inters[i]))], ["30","40","50",
27                                "60","70","80","90",str(int(max(Listas_Inters[i])))])
28     lgd = ax.legend(loc='upper center', bbox_to_anchor=(0.5, 1.10),
29                    ncol=3, fancybox=True, shadow=True,fontsize=14)
30     plt.show()

```

15. — Código gráfica de las curvas y la rejilla entre el 0 y el 1 —

```

1  def dibuja2(A,theta,T,c):
2      var("Var_a,Var_b")
3      R = RealField(1000); R
4      cota = len(A)
5      c[0]=c[0]%T
6      c[1]=c[1]%T
7      theta=R(theta)%(R(pi)/2)
8      if theta<0.1:
9          theta+=pi/2
10     R1.<X,Y,x,y> = PolynomialRing(R,"X,Y,x,y")
11     f = gamma(A)
12     r = R1(f).subs(X=(Var_a)*(2*cota)-cota,Y=(Var_b)*(2*cota)-cota)
13     dibujo = implicit_plot(r,(Var_a,0,1),(Var_b,0,1))
14     j=-2*cota
15     if T< 0.14:
16         j=-4*cota
17     while (j*T*cos(theta)<cota and j*T*sin(theta)<cota):
18         dibujo +=implicit_plot((1/tan(theta))*(Var_b-c[1])-(Var_a-c[0])+
19             j*T*(sin(theta)**-1),(Var_a,0,1),(Var_b,0,1),color="red")
20         dibujo +=implicit_plot((1/tan(theta+pi/2))*(Var_b-c[1])-(Var_a-c[0])+
21             j*T*(sin(theta+pi/2)**-1),(Var_a,0,1),(Var_b,0,1),color="red")
22         j=j+1
23     return dibujo
24

```

16. – Código intersecciones de la curvas con la rejilla entre 0 y 1 –

```

1  def dibuja_curva2(A,theta,T,c):
2      R = RealField(1000); R
3      cota = len(A)
4      c[0]=c[0]%T
5      c[1]=c[1]%T
6      if theta<0.1:
7          theta+=pi/2
8      InterseccionesV=[]
9      InterseccionesH=[]
10     R1.<X,Y,x,y> = PolynomialRing(R,"X,Y,x,y")
11     f = gamma(A)
12     j=-2*cota
13     if T< 0.14:
14         j=-4*cota
15     while (j*T*cos(theta)<cota and j*T*sin(theta)<cota):
16         f1=R1(f).subs(X=((1/tan(theta))*(Y-c[1])+c[0]+
17         (j*T)*(sin(theta)**-1))*(2*cota))-cota,Y=Y*(2*cota)-cota)
18         R1.<Y> = PolynomialRing(R,"Y")
19         f1=R1(f1)
20         f1 = f1.quo_rem(f1.gcd(f1.diff()))[0]
21         InterseccionesV.append(pari(f1).polsturm(0,1))
22         R1.<X,Y,x,y> = PolynomialRing(R,"X,Y,x,y")
23         f2=R1(f).subs(X=((1/tan(theta+(pi/2)))*(Y-c[1])+c[0]+
24         (j*T)*(sin(theta+(pi/2))**1))*(2*cota))-cota,Y=Y*(2*cota)-cota)
25         R1.<Y> = PolynomialRing(R,"Y")
26         f2=R1(f2)
27         f2 = f2.quo_rem(f2.gcd(f2.diff()))[0]
28         InterseccionesH.append(pari(f2).polsturm(0,1))
29         R1.<X,Y,x,y> = PolynomialRing(R,"X,Y,x,y")
30         j=j+1
31     Total=sum(InterseccionesV)+sum(InterseccionesH)
32     return Total,InterseccionesV,InterseccionesH

```

17. – Código estimación de la varianza segunda función –

```

1  # Nueva fórmula para la estimación de la varianza
2
3  #Estimacion de la varianza segunda función
4  def estimacion_varianza(A,T,numruns=50):
5      Lista_var=[]
6      Lista_estimation = []
7      puntos=[]
8      k=(numruns)**(1/2)
9      c1=random.uniform(0,1)
10     c2=random.uniform(0,1)
11     c3=random.uniform(0,1)
12     Int=[]
13     for i in range(0,numruns):
14         puntos.append((c3+i-1)*(pi/(2*numruns)))
15     random.shuffle(puntos)
16     for i in range(0,k):
17         for j in range(0,k):
18             s=(dibuja_curva(A,puntos[i],T,[(c1+i-1)*(T/k),(c2+j-1)*(T/k)]))
19             a=s[1]
20             b=s[2]
21             Int.append(s[0])
22             f0=(sum(a)*T)/2
23             f1=(sum(b)*T)/2
24             H = 1/float(len(a))
25             C00, C01, C02 = autocorr((a))[0], autocorr((a))[1], autocorr((a))[2]
26             H = 1/float(len(b))
27             if C01:
28                 sigma1=((2*H)*(3*C00**2*(2-H)/C01 + 2*C00*(H-6)+ 3*C01*(4-H)/(2-H)))
29             else:
30                 sigma1 = 0
31             C00, C01, C02 = autocorr((b))[0], autocorr((b))[1], autocorr((b))[2]
32             if C01:
33                 sigma2=((2*H)*(3*C00**2*(2-H)/C01 + 2*C00*(H-6)+ 3*C01*(4-H)/(2-H)))
34             else:
35                 sigma2 = 0
36             print(sigma1, sigma2)
37             v=sigma1+sigma2
38             est_var=((math.pi^2)*(((f0-f1)^2)-v))/60
39             est_var2=(math.pi^2*v)/4
40             L_est=(math.pi/2)*(f0+f1)
41             Lista_estimation.append(L_est)
42             Lista_var.append(est_var+est_var2)
43
44     return(Lista_var,Lista_estimation, Int)

```

Referencias

- What is stereology?: Stereology information center, Mar 2018a.
<http://www.stereology.info/stereology/>
- Sampling: Stereology information center, Feb 2018b.
<https://www.stereology.info/sampling/>
- M. Abramovich y I. Stegun. *Handbook of mathematical functions with formulas, graphs and mathematical tables, national bureau of standards*, volume 55. 1964.
- J. J. G. Arnau. La estereología como puente entre las matemáticas y otras ciencias. *Matemáticas en la ciencia y la cultura contemporáneas*, 6(18):34, 2006.
- N. Aronszajn. Theory of reproducing kernels. *Transactions of the American mathematical society*, 68(3):337–404, 1950.
- J. Brauchart y J. Dick. A simple proof of stolarsky’s invariance principle. *Proceedings of the American Mathematical Society*, 141(6):2085–2096, 2013.
- L. Cruz-Orive y X. Gual-Arnau. Precision of circular systematic sampling. *Journal of microscopy*, 207(3):225–242, 2002.
- L. M. Cruz-Orive. Precision of cavalieri sections and slices with local errors. *Journal of microscopy*, 193(3):182–198, 1999.
- L. M. Cruz-Orive, J. A. C. Albertos, F. J. G. González-Torre, F. J. L. Díaz, J. M. S. Alegría, F. P. Mendoza, F. E. Gordejuela, y L. A. F. Fernández. Estadística para todo (s). *Divulgación científica*, 2014.
- A. I. Gomez, M. Cruz y L. M. Cruz-Orive. On the precision of curve length estimation in the plane. *Image Analysis & Stereology*, 35(1):1–14, 2016.
- X. Gual-Arnau y L. M. Cruz-Orive. Systematic sampling on the circle and on the sphere. *Advances in Applied Probability*, 32(3):628–647, 2000.
- G. Leobacher y F. Pillichshammer. *Introduction to quasi-Monte Carlo integration and applications*. Springer, 2014.
- R. P. Michel y L. M. Cruz-Orive. Application of the cavalieri principle and vertical sections method to lung: estimation of volume and pleural surface area. *Journal of microscopy*, 150(2):117–136, 1988.
- F. Pausinger y D. Vartziotis. On the symmetry of finite sums of exponentials. *arXiv preprint arXiv:1810.01674*, 2018.